

DOLOČENI INTEGRAL

1. Izračunaj naslednje določene integrale:

(a) $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$

(b) $\int_2^4 \frac{dx}{1-x^2},$

(c) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}} dx,$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx.$

2. S pomočjo per partes izračunaj naslednje določene integrale:

(a) $\int_0^1 x e^x dx,$

(b) $\int_0^\pi x^2 \sin x dx.$

3. S pomočjo uvedbe nove spremenljivke izračunaj naslednje določene integrale.

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x dx,$

(b) $\int_0^4 x \sqrt{x^2 + 9} dx,$

(c) $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx,$

(d) $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx.$

4. Izračunaj ploščino območja, ko ga omejuje graf funkcije $y = x^2 + x + 1$ ter premice $x = 0$, $x = 1$ in $y = 0$.

5. Naj bo $a > 0$. Izračunaj ploščino območja, ki ga omejuje graf funkcije $y = \frac{1}{x}$ ter premice $x = 1$, $x = a$ in $y = 0$.

6. Naj bo $a > 0$. Izračunaj ploščino območja, ki ga omejuje krivulja $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ s koordinatnima osema.

7. Izračunaj ploščino območja, ki ga omejujeta grafa funkcij $y = x^2 + 3$ in $y = 4x$.

8. Izračunaj volumen vrtenine, ki jo dobimo tako, da graf funkcije $y = \cos^2 x$ zavrtimo okoli osi x na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$.

9. Izračunaj volumen vrtenine, ki jo dobimo tako, da območje med grafoma funkcij $y = e$ in $y = x \ln x$ zavrtimo okoli osi x na intervalu $[1, e]$.

10. Izračunaj površino vrtenine, ki jo dobimo tako, da zavrtimo graf funkcije $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ okoli osi x nad intervalom $[0, 1]$.

11. Izračunaj dolžino grafa funkcije $y = \frac{1}{x}$ med točkama $(1, 1)$ in $(2, \frac{1}{2})$.

12. Izračunaj dolžino parametrično podane krivulje

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{t^6}{6}, 2 - \frac{t^4}{4} \right)$$

med presečiščema s koordinatnima osema.

13. Izračunaj obseg elipse

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

14. Izračunaj obseg krivulje, ki je v polarnih koordinatah podana z enačbo $r(\varphi) = \sin^2 \varphi$.
Izračunaj še ploščino območja, ki ga ta krivulja omejuje.

15. Skiciraj krivuljo $r(\varphi) = \frac{1}{1+\cos^2 \varphi}$.

16. Ugotovi, ali konvergira vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n)}{1+n^2}.$$

17. Ugotovi, ali konvergira vrsta

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}.$$