Analiza 2
Rešitve 2. sklopa nalog

Nedoločeni integral

(5) Izračunaj integrale racionalnih funkcij:

(a) $\displaystyle\int \frac{3x^2+3x+9}{x^3+9x}\,dx,$

(b) $\displaystyle\int \frac{-25+25x+4x^2+x^3}{25x^2+x^4}\,dx,$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^3-1}\,dx,$

(d) $\displaystyle\int \frac{2}{x(x^2+1)^2}\,dx.$

Rešitev: Za integracijo racionalnih funkcij imamo na razpolago algoritem, ki nas vedno (z več ali manj truda) pripelje do rezultata. Praviloma integriramo racionalne funkcije s pomočjo razcepa na parcialne ulomke:

- S pomočjo deljenja zapišemo racionalno funkcijo v obliki $R(x) = p(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$, kjer je polinom r nižje stopnje kot polinom q.
- Polinom q razcepimo na produkt linearnih faktorjev in pa nerazcepnih kvadratnih faktorjev.
- Funkcijo $\frac{r(x)}{q(x)}$ zapišemo kot vsoto parcialnih ulomkov s pomočjo nastavkov:
  - $\frac{1}{(x-a)^k} \rightsquigarrow \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k},$
  - $\frac{1}{(x^2+bx+c)^l} \rightsquigarrow \frac{B_1+C_1x}{x^2+bx+c} + \frac{B_2+C_2x}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_l+C_lx}{(x^2+bx+c)^l}.$
- Integriramo vsak parcialni ulomek posebej.

(a) $\displaystyle\int \frac{3x^2+3x+9}{x^3+9x}\,dx$:

Razcep na parcialne ulomke se sedaj glasi

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2+3x+9}{x^3+9x} &= \frac{3x^2+3x+9}{x(x^2+9)} = \frac{A}{x} + \frac{B+Cx}{x^2+9}, \\
&= \frac{Ax^2+9A+Bx+Cx^2}{x(x^2+9)}, \\
&= \frac{x^2(A+C)+Bx+9A}{x(x^2+9)}.
\end{aligned}$$

Od tod dobimo sistem treh enačb za tri neznanke:

$$\begin{aligned} A + C &= 3, \\ B &= 3, \\ 9A &= 9, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = 1$, $B = 3$ in $C = 2$. Sledi

$$\int \frac{3x^2 + 3x + 9}{x^3 + 9x}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{3 + 2x}{x^2 + 9} \right) dx = \underline{\underline{\ln|x| + \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{3} + \ln\left(x^2 + 9\right) + C}}.$$

(b) $\displaystyle\int \frac{-25 + 25x + 4x^2 + x^3}{25x^2 + x^4}\, dx$:

Razcepimo najprej integrand na parcialne ulomke:

$$\begin{aligned} \frac{-25 + 25x + 4x^2 + x^3}{25x^2 + x^4} &= \frac{-25 + 25x + 4x^2 + x^3}{x^2(x^2 + 25)}, \\ &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 25}, \\ &= \frac{A(x^3 + 25x) + B(x^2 + 25) + Cx^3 + Dx^2}{x^2(x^2 + 25)}, \\ &= \frac{25B + 25Ax + x^2(B + D) + x^3(A + C)}{x^2(x^2 + 25)}. \end{aligned}$$

Tako pridemo do sistema enačb

$$\begin{aligned} A + C &= 1, \\ B + D &= 4, \\ 25A &= 25, \\ 25B &= -25, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 5$. Sledi

$$\int \frac{-25 + 25x + 4x^2 + x^3}{25x^2 + x^4}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^2 + 25} \right) dx = \underline{\underline{\ln|x| + \frac{1}{x} + \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{5} + C}}.$$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^3 - 1}\, dx$:

Pri tej nalogi si bomo z nekaj spretnosti računanje olajšali.

$$\int \frac{x^5}{x^3 - 1}\, dx = \int \frac{x^5 - x^2 + x^2}{x^3 - 1}\, dx = \int \left(x^2 + \frac{x^2}{x^3 - 1} \right) dx = \underline{\underline{\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} \ln|x^3 - 1| + C}}.$$

(d) $\displaystyle\int \frac{2}{x(x^2 + 1)^2}\, dx$:

Integracija s pomočjo razcepa racionalne funkcije na parcialne ulomke dobro deluje, če so vsi kvadratni faktorji v njenem števcu kvečjemu na prvo potenco. V primeru višjih potenc pa si pomagamo z nastavkom.

- Zapišemo $R(x) = p(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ in faktoriziramo q.
- Uporabimo nastavek:
  - $\frac{1}{(x-a)^k} \rightsquigarrow A \ln|x-a|$,
  - $\frac{1}{(x^2+bx+c)^l} \rightsquigarrow B \ln(x^2+bx+c) + C \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}$,
  - $\frac{\tilde{r}(x)}{\tilde{q}(x)}$, kjer polinom $\tilde{q}$ dobimo iz polinoma q z znižanjem potence vsakega faktorja za ena, polinom $\tilde{r}$ pa ima stopnjo za eno nižjo kot $\tilde{q}$.
- Odvajamo obe strani in izračunamo koeficiente.

Vzemimo nastavek

$$\int \frac{2}{x(x^2+1)^2}\,dx = A \ln|x| + B \ln(x^2+1) + C \operatorname{arc\,tg} x + \frac{D+Ex}{x^2+1}.$$

Z odvajanjem dobimo

$$\begin{aligned}\frac{2}{x(x^2+1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{2Bx+C}{x^2+1} + \frac{E(x^2+1)-(D+Ex)2x}{(x^2+1)^2},\\ &= \frac{A(x^4+2x^2+1)+B(2x^4+2x^2)+C(x^3+x)+D(-2x^2)+E(-x^3+x)}{(x^2+1)^2}.\end{aligned}$$

Dobimo sistem petih enačb za pet neznank:

$$\begin{aligned}A+2B &= 0,\\ C-E &= 0,\\ 2A+2B-2D &= 0,\\ C+E &= 0,\\ A &= 2,\end{aligned}$$

ki ima rešitev $A=2$, $B=-1$, $C=0$, $D=1$, $E=0$. Sledi

$$\int \frac{2}{x(x^2+1)^2}\,dx = \underline{\underline{2\ln|x| - \ln\left(x^2+1\right) + \frac{1}{x^2+1} + C.}}$$

$\square$

(6) Izračunaj integrale trigonometričnih funkcij:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{5+4\cos x}\,dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx$.

Rešitev: Pri integralih tipa $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$, kjer je R racionalna funkcija, si pomagamo z univerzalno trigonometrično substitucijo

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t.$$

Z uporabo trigonometričnih enakosti lahko izrazimo:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{2\,dt}{1+t^2}, \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2}, \end{aligned}$$

kar nam problem prevede na integriranje racionalnih funkcij.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{5+4\cos x}\,dx$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{5+4\cos x}\,dx &= \int \frac{1}{5+4\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{2\,dt}{5(1+t^2)+4(1-t^2)}, \\ &= \int \frac{2}{t^2+9}\,dt = \underline{\underline{\frac{2}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.}} \end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\,dx$:

Univerzalna trigonometrična substitucija nas sicer vedno pripelje do rezultata, vendar pa v primeru, ko nastopata sin in cos v integrandu v višjih potencah, hitro pridemo do kompliciranih racionalnih funkcij. Zato se nam splača na začetku s pomočjo adicijskih izrekov čimbolj znižati potence v integrandu.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{1+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{1+\frac{\cos 2x+1}{2}}\,dx = \int \frac{2}{\cos 2x + 3}\,dx.$$

Sedaj uvedimo novo spremenljivko $2x = u$ in nato še $\operatorname{tg}\frac{u}{2} = t$. Sledi

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\,dx &= \int \frac{2}{\cos 2x+3}\,dx = \int \frac{du}{\cos u + 3} = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+3} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2}, \\ &= \int \frac{dt}{t^2+2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} x\right) + C.}} \end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx$:

Ta integral lahko izračunamo brez uporabe univerzalne trigonometrične substitucije, če poskusimo z novo spremenljivko $t = 2 + \sin x$. Potem je $dt = \cos x\,dx$ in

$$\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \underline{\underline{\ln|2+\sin x| + C.}}$$

$\square$

(7) Izračunaj integrale iracionalnih funkcij:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}\,dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x}}\,dx$.

Rešitev: Integrale tipa $\int \frac{p(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ integriramo na naslednji način:

(1) Če je polinom p konstanten, integral prevedemo na enega izmed integralov:

$$\cdot \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a > 0,$$
$$\cdot \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C, \quad a > 0,$$
$$\cdot \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C, \quad a > 0.$$

(2) Če je p poljuben polinom, uporabimo nastavek

$$\int \frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \tilde{p}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \int \frac{C}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,$$

kjer je C konstanta, polinom $\tilde{p}$ pa ima stopnjo eno manjšo kot p.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}\,dx$:

Med računanjem bomo uvedli novo spremenljivko $t = x + \frac{1}{2}$, kar nam da $dx = dt$ in

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2 - \frac{1}{4}}\right| + C,$$
$$= \underline{\underline{\ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x+x^2}\right| + C}}.$$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$:

Pri tem primeru bomo uvedli novo spremenljivko $t = x - 1$, kar nam spet da $dx = dt$. Sledi

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x-1)^2+1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \underline{\underline{\arcsin(x-1) + C}}.$$

(c) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x}}\,dx$:

V tem primeru bomo uporabili nastavek

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x}}\,dx = A\sqrt{x^2+4x} + \int \frac{B}{\sqrt{x^2+4x}}\,dx.$$

Z odvajanjem te enakosti dobimo

$$\frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x}} = \frac{A(x+2)}{\sqrt{x^2+4x}} + \frac{B}{\sqrt{x^2+4x}} = \frac{A(x+2)+B}{\sqrt{x^2+4x}}.$$

S primerjavo koeficientov polinomov v števcu pridemo do sistema dveh enačb za dve neznanki:

$$\begin{aligned} A &= 1, \\ 2A + B &= 3, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = B = 1$. Tako dobimo

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x}}\,dx &= \sqrt{x^2+4x} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}} = \sqrt{x^2+4x} + \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-4}}, \\ &= \underline{\underline{\sqrt{x^2+4x} + \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x}\right| + C}}. \end{aligned}$$

Zadnji integral lahko izračunamo z uvedbo nove spremenljivke $t = x + 2$. □

(8) Izračunaj integrale iracionalnih funkcij:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})^2}$,

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{3x-1}}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$.

Rešitev: Integrale tipa $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\,dx$ integriramo s pomočjo substitucije

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \quad \text{oziroma} \quad t^n = \frac{ax+b}{cx+d},$$

ki nam integral prevede na integriranje racionalnih funkcij.

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})^2}$:

Če definiramo $t^6 = x$, je $dx = 6t^5\,dt$ in $\sqrt[6]{x} = t$. Sledi

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})^2} &= \int \frac{6t^5}{(t^3+t^2)^2}\,dt = \int \frac{6t}{(t+1)^2}\,dt = \int \frac{6(t+1)-6}{(t+1)^2}\,dt,\\ &= 6\ln|t+1| + \frac{6}{t+1} + C = \underline{\underline{6\ln(\sqrt[6]{x}+1) + \frac{6}{\sqrt[6]{x}+1} + C}}.\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{3x-1}}\,dx$:

Tokrat definirajmo $t^2 = 3x-1$. Od tod dobimo $x = \frac{1+t^2}{3}$, $dx = \frac{2t}{3}\,dt$ in $\sqrt{3x-1} = t$. Sledi

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{3x-1}}\,dx &= \int \frac{\frac{2t}{3}}{\frac{(1+t^2)}{3}t}\,dt = \int \frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\operatorname{arc\,tg} t + C,\\ &= \underline{\underline{2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3x-1} + C}}.\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$:

Definirajmo $t^2 = \frac{x-1}{x+1}$. Od tod sledi $2t\,dt = \frac{2}{(x+1)^2}\,dx$ in

$$\int \frac{1}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx = \int t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \underline{\underline{\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{3}{2}} + C}}.$$

□

(9) Izračunaj integrala transcendentnih funkcij:

(a) $\displaystyle\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$,

(b) $\displaystyle\int \ln^3 x\,dx$.

Rešitev:

(a) $\displaystyle\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$:

Integrale tipa $\int R(e^x)\,dx$ integriramo s pomočjo substitucije

$$e^x = t \Longrightarrow dx = \frac{dt}{t},$$

ki nam problem prevede na integriranje racionalnih funkcij. Po uvedbi nove spremenljivke dobimo

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = \int \frac{t-1}{t+1}\,\frac{dt}{t} = \int \frac{t-1}{t(t+1)}\,dt.$$

Dobljeno racionalno funkcijo sedaj razcepimo na parcialne ulomke

$$\frac{t-1}{t(t+1)} = -\frac{1}{t} + \frac{2}{t+1}.$$

Sledi

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = \int \left(-\frac{1}{t} + \frac{2}{t+1}\right) dt = -\ln|t| + 2\ln|t+1| + C = \underline{\underline{-x + 2\ln(e^x+1) + C}}.$$

(b) $\int \ln^3 x\,dx$:

Integrale tipa $\int p(\ln x)\,dx$ integriramo s pomočjo substitucije

$$\ln x = t \Longrightarrow dx = e^t\,dt,$$

ki nam problem prevede na integral tipa $\int p(t)e^t\,dt$, ki ga rešimo z integracijo po delih.

$$\begin{aligned}\int \ln^3 x\,dx &= \int t^3 e^t\,dt = t^3e^t - 3\int t^2e^t\,dt = t^3e^t - 3t^2e^t + 6\int te^t\,dt,\\ &= t^3e^t - 3t^2e^t + 6(te^t - e^t) + C = \underline{\underline{x(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6) + C}}.\end{aligned}$$

<u>Opomba</u>: Pri integralih tipa $\int R(\ln x)\,dx$ pridemo z isto substitucijo do integralske eksponentne funkcije $\int \frac{e^t}{t}\,dt$, ki pa se je ne da izraziti z elementarnimi funkcijami. $\square$