Analiza 2
Rešitve 4. sklopa nalog

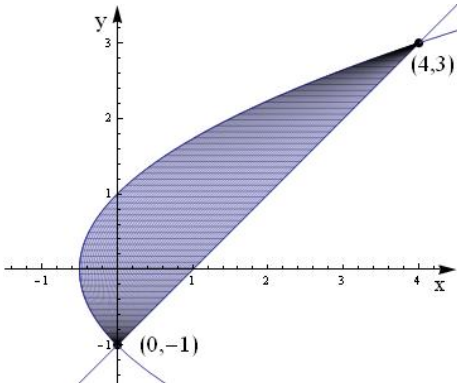
Uporaba integrala

(1) Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta krivulji $y^2 = 2x + 1$ in $y = x - 1$.

Dokaz. Nalogo bomo rešili na dva načina.

1. način:

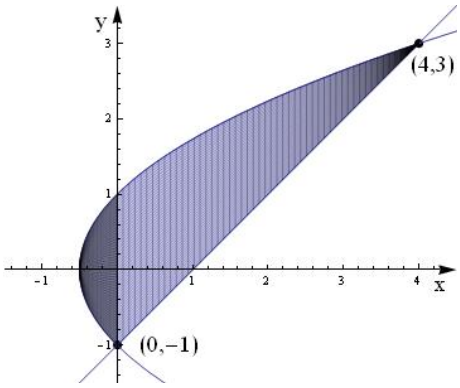
Pri tem načinu bomo integrirali po spremenljivki y na intervalu $y \in [-1, 3]$. Leva in desna robna krivulja našega lika imata v tem primeru enačbi $x(y) = \frac{y^2-1}{2}$ oziroma $x(y) = y + 1$.



Sledi

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{3} \left((y+1) - \left(\frac{y^2-1}{2} \right) \right) dy, \\ &= \int_{-1}^{3} \left(y + \frac{3}{2} - \frac{y^2}{2} \right) dy, \\ &= \left(\frac{y^2}{2} + \frac{3}{2}x - \frac{y^3}{6} \right) \Big|_{-1}^{3}, \\ &= \underline{\underline{\frac{16}{3}}}. \end{aligned}$$

2. način: Pri tem načinu bomo integrirali po spremenljivki x. Spodnji rob lika je v našem primeru sestavljen iz krivulje $y = -\sqrt{2x+1}$ na intervalu $[-\frac{1}{2}, 0]$ in pa iz krivulje $y = x - 1$ na intervalu $[0, 4]$. Zgornji del roba sestoji iz krivulje $y = \sqrt{2x+1}$ na intervalu $[-\frac{1}{2}, 4]$. Ploščino lika bomo izračunali, tako da bomo lik razdelili na dva kosa (en del bo levo od ordinatne osi, drugi del pa desno od ordinatne osi). S tem dosežemo, da imata oba lika zgornji in spodnji rob definiran s po enim samim predpisom.



Računajmo

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(\sqrt{2x+1} - \left(-\sqrt{2x+1}\right)\right)\, dx + \int_{0}^{4} \left(\sqrt{2x+1} - (x-1)\right)\, dx, \\
&= 2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \sqrt{2x+1}\, dx + \int_{0}^{4} \left(\sqrt{2x+1} - x + 1\right)\, dx, \\
&= \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} + \left(\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{0}^{4}, \\
&= \frac{2}{3} + \left((9-8+4) - \frac{1}{3}\right), \\
&= \underline{\underline{\frac{16}{3}}}.
\end{aligned}
$$

Opomba: Pri tej nalogi smo videli, da integracija po x ni vedno najboljša in najlažja pot. Če smo integrirali po y, smo lahko ploščino izračunali v enem kosu, pa še integrand je bil bolj enostaven. □

(2) Izračunaj ploščino lika, ki ga omejuje astroida. Astroida je podana v parametrični obliki:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= a\cos^3 t, \\
y(t) &= a\sin^3 t
\end{aligned}
$$

za $t \in [0, 2\pi]$ in nek $a > 0$.

Rešitev: Astroida je krivulja, ki po obliki spominja na zvezdo.

Podamo jo lahko v parametrični obliki z vektorsko funkcijo $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, kjer je:

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos^3 t, \\ y(t) &= a\sin^3 t, \end{aligned}$$

za parametre $t \in [0, 2\pi]$. Lahko pa jo podamo tudi v implicitni obliki z enačbo

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Če imamo krivuljo v parametrični obliki podano s predpisom $\vec{r} : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^2$, potem družina zveznic med krivuljo in pa koordinatnim izhodiščem opiše lik, katerega ploščina je enaka

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - \dot{x}y)\, dt.$$

Pri tem je treba biti pozoren na predznak. Če se po krivulji premikamo v 'pozitivni' smeri glede na izhodišče, dobimo običajno ploščino, pri premikanju v 'negativni' smeri pa negativno predznačeno ploščino. Če se del poti premikamo v pozitivni smeri del poti pa v negativni smeri, je treba obravnavati vsak kos posebej. Če je krivulja sklenjena (to je $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$), pa lahko uporabimo katerokoli izmed formul

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - \dot{x}y)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} x\dot{y}\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}y\, dt.$$

Za izračun ploščine astroide moramo najprej izračunati odvoda koordinat x in y:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3a\cos^2 t \sin t, \\ \dot{y} &= 3a\sin^2 t \cos t. \end{aligned}$$

Od tod dobimo $x\dot{y} - \dot{x}y = 3a^2\cos^2 t \sin^2 t$ in

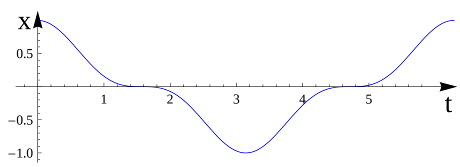
$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3a^2\cos^2 t \sin^2 t\, dt = \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\, dt = \underline{\underline{\frac{3\pi a^2}{8}}}.$$

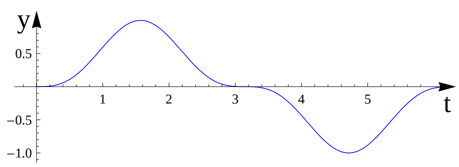
<u>Opomba 1</u>: Vektorska funkcija oziroma parametrično podana krivulja je funkcija

$$\vec{r} : D \to \mathbb{R}^2,$$

kjer je $D \subset \mathbb{R}$. Najlažje si jo predstavljamo kot gibanje točke po ravnini. Parameter $t \in D$ si predstavljamo kot čas, vrednost $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ pa kot položaj točke ob času t.

Pri skiciranju tira vektorske funkcije običajno najprej skiciramo grafa obeh koordinat. V primeru funkcij $x(t) = \cos^3 t$ in $y(t) = \sin^3 t$ tako dobimo

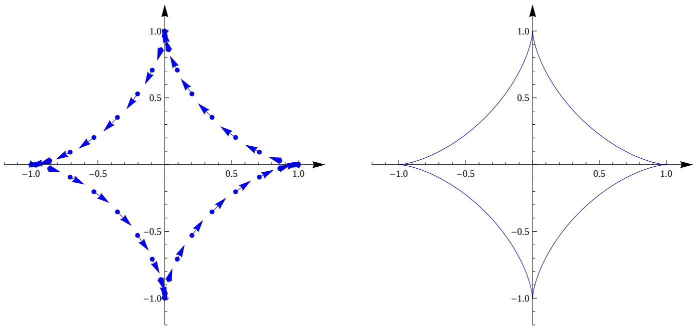




Na intervalih, kjer funkcija $x(t)$ narašča, se točka premika v desno, kjer pa pada, pa v levo. Podobno nam naraščanje funkcije $y(t)$ pove, da se točka premika navzgor, padanje pa pomeni, da se premika navzdol. V stacionarnih točkah funkcije x, je tangenta na tir funkcije navpična, v stacionarnih točkah funkcije y pa vodoravna. Če imata ob nekem času obe funkciji x in y odvod enak nič, se lahko zgodi, da dobimo na tiru ost. Preden skiciramo tir vektorske funkcije, ponavadi izračunamo še odvod vektorske funkcije oziroma hitrost točke.

$$\dot{\vec{r}}(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t).$$

Sedaj najprej izračunamo položaje točke ob nekaterih časih in jih opremimo še z majhnimi puščicami v smeri hitrosti. Nato skozi te točke potegnemo krivuljo.

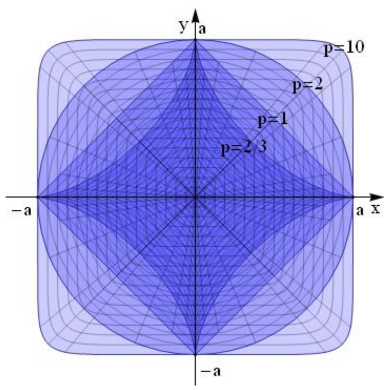


Opomba 2: Astroida spada v družino krivulj oblike $|x|^p + |y|^p = a^p$ za $p \in (0, \infty)$. Pri $p = 2$ dobimo krožnico s polmerom a, pri $p = \frac{2}{3}$ pa astroido. Te krivulje imajo naravno parametrizacijo

$$\begin{aligned} x(t) &= \pm a|\cos t|^{\frac{2}{p}}, \\ y(t) &= \pm a|\sin t|^{\frac{2}{p}}, \end{aligned}$$

za $t \in [0, 2\pi]$. Predznaki so določeni s predznaki funkcij cos oziroma sin.

Pri velikih p dobimo like, ki čedalje bolj aproksimirajo kvadrat, pri majhnih p pa like s ploščino, ki se približuje 0.



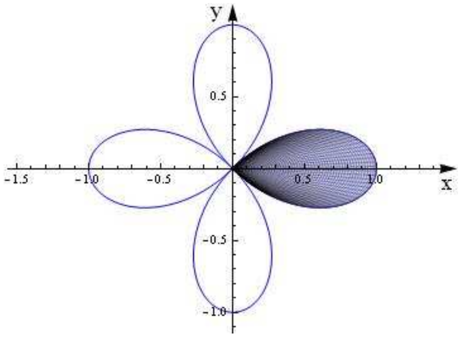
$\square$

(3) Izračunaj ploščino lika, ki ga omejuje krivulja, ki je v polarnih koordinatah podana s predpisom

$$r(\phi) = \cos 2\phi$$

za $\phi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

Rešitev: Poglejmo najprej skico lika.



Ploščino lika, ki je omejen s krivuljo podano v polarnih koordinatah, izračunamo po formuli

$$S = \frac{1}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} r^2 \, d\phi.$$

V našem primeru tako dobimo

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\phi \, d\phi = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 4\phi}{2} \, d\phi = \frac{1}{4} \left(\phi + \frac{\sin 4\phi}{4} \right) \Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \underline{\underline{\frac{\pi}{8}}}.$$

□

(4) Izračunaj obseg astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ za $a > 0$.

Rešitev: Spomnimo se, da lahko astroido parametriziramo s predpisom:

$$x(t) = a \cos^3 t,$$
$$y(t) = a \sin^3 t.$$

za $t \in [0, 2\pi]$. Sledi:

$$\dot{x} = -3a \cos^2 t \sin t,$$
$$\dot{y} = 3a \sin^2 t \cos t.$$

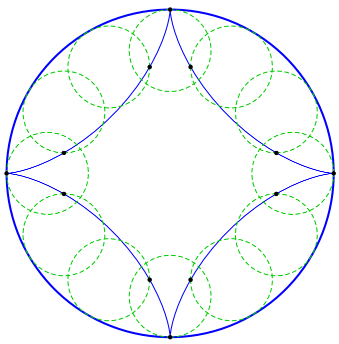
Dolžino parametrično podane krivulje izračunamo po formuli

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt.$$

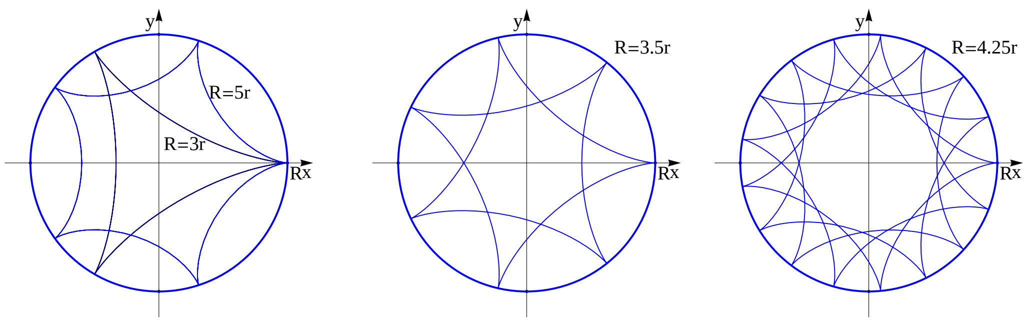
Tako dobimo:

$$
\begin{aligned}
l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt,\\
&= 3a\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}\,dt,\\
&= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t\,dt,\\
&= 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt,\\
&= -3a\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}},\\
&= \underline{\underline{6a}}.
\end{aligned}
$$

Opomba: Astroida spada tudi v družino hipocikloid. To so krivulje, ki jih dobimo s kotaljenjem krožnice s polmerom r po notranjem obodu večje krožnice s polmerom R. Če velja $R = 4r$, dobimo ravno astroido.



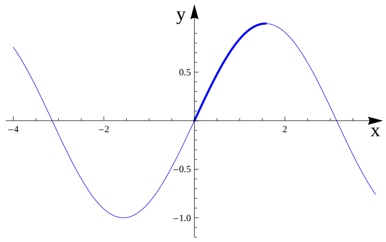
Če je razmerje $R = nr$, kjer je $n \in \mathbb{N}$, dobimo krivuljo z n ostmi, če pa je $R = \frac{p}{q}r$, pa dobimo krivuljo s p ostmi, ki q-krat 'obkroži' izhodišče preden se spet sklene.



$\square$

(5) S pomočjo trapezne metode izračunaj dolžino sinusoide $f(x) = \sin x$ na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tako da bo napaka manjša od 0.01.

Rešitev: Računamo dolžino loka sinusoide na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



Ker je $f'(x) = \cos x$, nas torej zanima določeni integral

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx.$$

Pri računanju dolžin krivulj praviloma naletimo na integrale iracionalnih funkcij, ki jih je težko integrirati, zato nam prav pridejo metode numerične integracije. Označimo

$$g(x) = \sqrt{1 + \cos^2 x}.$$

Spomnimo se, da je napaka aproksimacije pri trapezni metodi enaka

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in [a,b]} |g''(x)| = \frac{\pi^3}{96n^2} \max_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} |g''(x)|.$$

Število n bomo izbrali tako, da bo iz zgornje ocene sledilo $|R_n| < 0.01$. V ta namen moramo najprej oceniti velikost $|g''(x)|$. Odvoda funkcije g sta

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{\sin 2x}{2\sqrt{1 + \cos^2 x}}, \\ g''(x) &= -\frac{2 \cos 2x \sqrt{1 + \cos^2 x} - \frac{\sin^2 2x}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}}{2(1 + \cos^2 x)}. \end{aligned}$$

Maksimum funkcije g'' sicer lahko poiščemo natančno, a je s tem lahko kar nekaj dela, zato je dovolj, če ga navzgor ocenimo. Velja

$$|g''(x)| \le \frac{2|\cos 2x|\sqrt{1 + \cos^2 x} + \frac{\sin^2 2x}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}}{2(1 + \cos^2 x)} \le \frac{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{2}}{2 \cdot 1} = \sqrt{2} + \frac{1}{4} < \frac{7}{4}.$$

Od tod sledi, da je

$$|R_n| \le \frac{\pi^3}{96n^2} \max_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} |g''(x)| \le \frac{7\pi^3}{4 \cdot 96n^2}.$$

Ker želimo, da bo $|R_n| < 0.01$, je dovolj najti n, ki zadošča

$$\frac{7\pi^3}{0.01 \cdot 4 \cdot 96} \le n^2.$$

Dobri so $n \ge 8$. Torej bomo integrirali funkcijo $g(x) = \sqrt{1 + \cos^2 x}$ na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ s trapezno metodo pri $n = 8$. Poglejmo si tabelo vrednosti v delilnih točkah:

x_k	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{2\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{4\pi}{16}$	$\frac{5\pi}{16}$	$\frac{6\pi}{16}$	$\frac{7\pi}{16}$	$\frac{\pi}{2}$
y_k	1.414	1.401	1.361	1.301	1.225	1.144	1.071	1.019	1

Sledi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx \approx \frac{\pi}{32}\,(y_0+2y_1+2y_2+2y_3+2y_4+2y_5+2y_6+2y_7+y_8) = 1.9101.$$

Dejanska dolžina tega loka sinusoide je približno 1.910098895. Vidimo, da je napaka precej manjša od naše ocene. □