Analiza 2
Rešitve 5. sklopa nalog

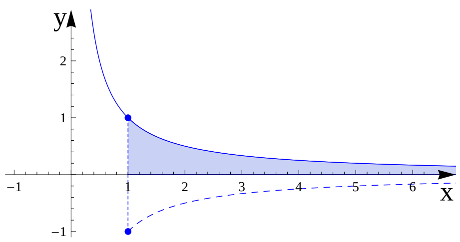
Uporaba integrala

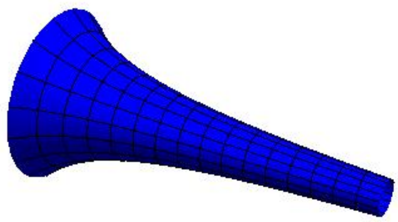
(6) Graf funkcije f, kjer je $f(x) = \frac{1}{x}$, zavrtimo na intervalu $[1, \infty)$ okoli osi x.

(a) Izračunaj volumen dobljenega telesa.

(b) Pokaži, da je površina dobljenega telesa neskončna.

Rešitev: Telo, ki ga študiramo pri tej nalogi, včasih imenujemo Torricellijeva trobenta ali pa tudi Gabrielov rog. To je bil eden prvih znanih primerov teles, ki imajo končen volumen in neskončno površino.





(a) Volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo, če zavrtimo graf funkcije f okoli osi x na intervalu $[a, b]$, je enak

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

Volumen Torricellijeve trobente je tako enak

$$V = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx = -\pi \frac{1}{x}\Big|_1^\infty = \underline{\underline{\pi}}.$$

(b) Površina rotacijskega telesa, ki ga dobimo, če zavrtimo graf funkcije f okoli osi x na intervalu $[a, b]$, pa je enaka

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx.$$

Ker je $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, moramo torej pokazati, da integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \, dx$$

divergira. To bi lahko pokazali s pomočjo kriterija, ki smo ga spoznali pri obravnavi izlimitiranih integralov. Lahko pa naredimo preprosto oceno

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \, dx > \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty.$$

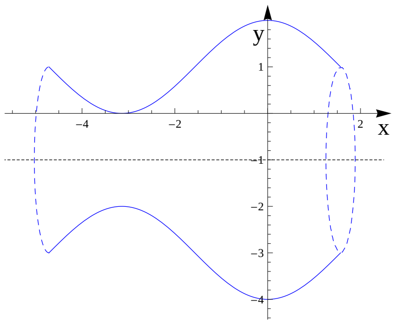
Ker integral na desni divergira, divergira tudi integral na levi. $\square$

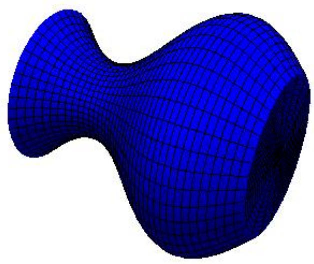
(7) Izračunaj volumen vrtenine, ki jo dobimo, če graf funkcije $f(x) = \cos x + 1$ na intervalu $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ zavrtimo okoli osi $y = -1$.

Rešitev: Volumen vrtenine, ki jo dobimo pri vrtenju grafa funkcije f okoli osi x na intervalu $[a, b]$, je enak

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

Pri vrtenju grafa funkcije f okoli osi $y = a$ pa dobimo telo z istim volumnom, kot če bi graf funkcije $g(x) = f(x) - a$ vrteli okoli osi x.





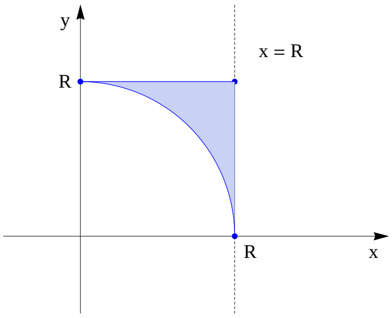
Sledi:

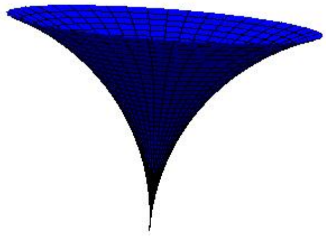
$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 2)^2 \, dx, \\
&= \pi \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + 4\cos x + 4) \, dx, \\
&= \pi \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos 2x + 1}{2} + 4\cos x + 4 \right) dx, \\
&= \pi \left(\frac{\sin 2x}{4} + 4 \sin x + \frac{9x}{2} \right) \Bigg|_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}, \\
&= \pi \left(4 + \frac{9\pi}{4} - \left(4 - \frac{27\pi}{4} \right) \right), \\
&= \underline{\underline{9\pi^2}}.
\end{aligned}$$

□

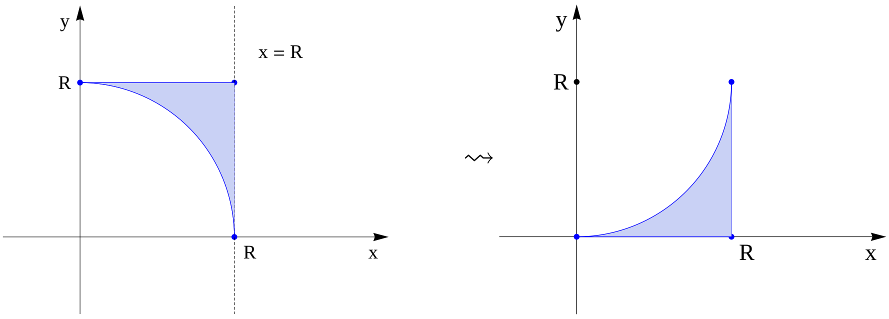
(8) Dan je lik $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq R^2, 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R\}$, kjer je $R > 0$. Izračunaj površino plašča telesa, ki ga dobimo, če lik L zavrtimo okoli osi $x = R$.

Rešitev: Lik L dobimo tako, da iz kvadrata s stranico R izrežemo četrtino kroga s polmerom R. Dobljena vrtenina ima obliko lijaka.





Na izbiro imamo dve možnosti. Razdalja točke na loku, ki je na višini y, od osi $x = R$ je enaka $r(y) = R - \sqrt{R^2 - y^2}$. Z integracijo ustrezne funkcije po y tako dobimo površino plašča vrtenine. Opazimo pa lahko, da isto telo dobimo tudi z vrtenjem lika pod grafom funkcije $f(x) = R - \sqrt{R^2 - x^2}$ okoli abscisne osi.

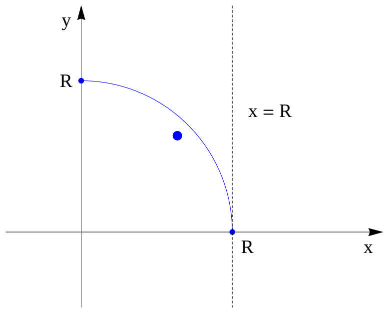


Velja $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, od koder sledi:

$$
\begin{aligned}
P &= 2\pi \int_0^R \left(R - \sqrt{R^2 - x^2}\right) \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx, \\
&= 2\pi \int_0^R \left(R - \sqrt{R^2 - x^2}\right) \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}}\, dx, \\
&= 2\pi \int_0^R \left(\frac{R^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} - R\right) dx, \\
&= 2\pi \left(R^2 \arcsin\left(\frac{x}{R}\right) - Rx\right)\Big|_0^R, \\
&= 2\pi R^2 \cdot \frac{\pi}{2} - 2\pi R^2, \\
&= \underline{\underline{\pi R^2 (\pi - 2)}}.
\end{aligned}
$$

Opomba: Površino plašča vrtenine lahko izračunamo tudi s pomočjo Guldinovega pravila.

Guldinovo pravilo: Površina plašča vrtenine, ki ga dobimo pri vrtenju loka okoli neke osi, je enaka produktu dolžine loka, ki ga vrtimo in pa dolžine poti, ki jo pri enem vrtljaju opiše geometrijsko središče loka.



Koordinati geometrijskega središča loka, ki ga določa graf funkcije f na intervalu $[a, b]$ sta:

$$x_* = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}{l},$$
$$y_* = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}{l}.$$

Pri tem smo z l označili dolžino loka.

V našem primeru potrebujemo x-koordinato središča krožnega loka $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ na intervalu $x \in [0, R]$. Dobimo jo po formuli

$$x_* = \frac{\int_0^R x\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx}{l}.$$

Dolžina krožnega loka je $l = \frac{\pi R}{2}$, integral v števcu pa je enak:

$$\begin{aligned}
\int_0^R x\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx &= \int_0^R x\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}\,dx,\\
&= R\int_0^R \frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx; \qquad R^2 - x^2 = t,\\
&= -\frac{R}{2}\int_{R^2}^0 \frac{dt}{\sqrt{t}},\\
&= -R\cdot t^{1/2}\Big|_{R^2}^{0},\\
&= R^2.
\end{aligned}$$

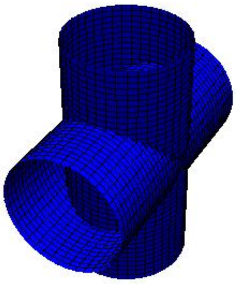
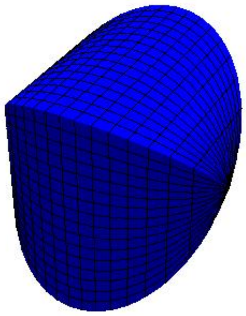
Od tod sledi, da za središče krožnega loka velja $x_* = \frac{2R}{\pi}$, iz Guldinovega pravila pa sledi

$$P = 2\pi\left(R - \frac{2R}{\pi}\right) l = \underline{\underline{\pi R^2(\pi - 2)}}.$$

$\square$

(9) Izračunaj volumen telesa, ki ga dobimo kot presek dveh središčno in pravokotno sekajočih se valjev enakih polmerov.

Rešitev: Poglejmo si primer, ko imata oba valja polmer R in ko ima eden izmed njiju os v smeri osi y, drugi pa v smeri osi z.

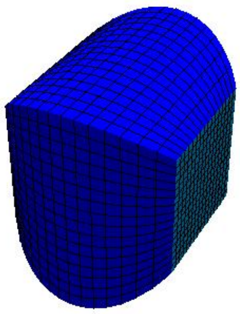
V tem primeru naše telo ni dobljeno z vrtenjem nekega lika, zato moramo za izračun volumna ubrati drugačno pot. Telo lahko predstavimo kot množico točk

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2,\, x^2 + z^2 \leq R^2\,\}.$$

Če presekamo telo z ravnino $x = x_0$, dobimo kot presek kvadrat

$$\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq R^2 - x_0^2,\, z^2 \leq R^2 - x_0^2\,\},$$

katerega ploščina je enaka $S(x_0) = 4(R^2 - x_0^2)$.



Volumen bomo sedaj izračunali tako, da bomo telo najprej razdelili na kvadre, ki jih dobimo z odebelitvijo takšnih presekov, in nato sešteli vsote njihovih volumnov s pomočjo Riemannovega integrala. Velja

$$dV = 4(R^2 - x^2)dx$$

in

$$V = \int_{-R}^{R} dV = 4\int_{-R}^{R}(R^2 - x^2)\,dx = 4\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R} = \underline{\underline{\frac{16}{3}R^3}}.$$

$\square$