

zapiski!

# REŠITVE!

Ime in priimek

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|   |   |   |   |   |

Vpisna številka

## Naloga 1 [25 točk]

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -4 & 3 \\ 1 & 4 & a & 4 \\ 1 & 4 & 3a-2 & a+7 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

S pomočjo  $LU$  razcepa brez pivotiranja ugotovite, za katere vrednosti  $a \in \mathbb{R}$  je matrika  $A$  singularna.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -4 & 3 \\ 1 & 4 & a & 4 \\ 1 & 4 & 3a-2 & a+7 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & a-3 & 5 \\ 1 & 2 & 3a-5 & a+8 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & a-1 & 1 \\ 1 & 2 & 3a-3 & a+4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & a-1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & a+1 \end{array}$$

če  $a-1 \neq 0$   
 $a \neq 1$

Matrika bo singularna, če je  $a = -1$ .

V primeru, da je  $a = 1$ , se od tu vidi, da je tudi singularna!

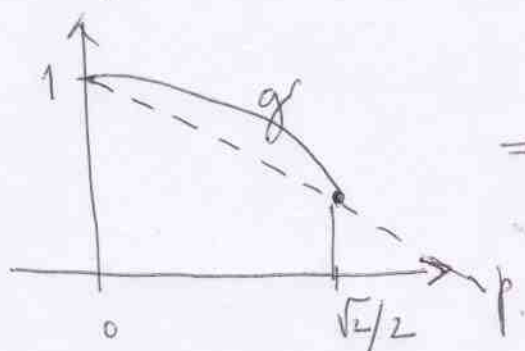
## Naloga 2 [25 točk]

Dana je funkcija  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  s predpisom

$$f(x) = \frac{1}{2} - \int_0^x \exp(-t^2) dt.$$

- Prepričajte se, da ima  $f$  natanko eno ničlo na  $(0, \sqrt{2}/2)$ . Namig: Funkcija  $g(t) = \exp(-t^2)$  je konkavna na  $(0, \sqrt{2}/2)$ .
- Prepričajte se, da ima  $f$  natanko eno ničlo na  $(0, \infty)$ .
- Preverite, da je red konvergence Newtonove metode za iskanje ničle funkcije  $f$  enak 2.

a) Upoštevamo namig in skiciramo  $g$



$\Rightarrow$  Če je  $p$  premica, hi interpolirava  $(0, 1)$ ,  $(\sqrt{2}/2, e^{-1/2})$ ,  
 $\forall x$  za  $0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ :  
 $\int_0^x g(t) dt \geq \int_0^x p(t) dt$

$$\text{Torej je } f(x) = \frac{1}{2} - \int_0^x g(t) dt \leq \frac{1}{2} - \int_0^x \left(1 + \frac{e^{-1/2} - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 0}(t)\right) dt$$

$$= \frac{1}{2} - \left(x + \frac{e^{-1/2} - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{e^{-1/2} - 1}{\sqrt{2}} \frac{2}{4} < 0$$

Ker je  $f(0) = \frac{1}{2}$  in  $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) < 0 \Rightarrow f$  ima ničlo na  $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$

b)  $f'(x) = -e^{-x^2} < 0 \quad \forall x \Rightarrow f$  padajoča  $\Rightarrow f$  ima natanko eno ničlo

c)  $f'(x) = -e^{-x^2} \neq 0 \Rightarrow$  ničla je enostana

$f''(x) = +2xe^{-x^2} \neq 0 \quad \forall x \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow$  New. metoda konvergira z redom 2.

### Naloga 3 [25 točk]

Funkcijo  $f(x) = \exp(-x)$  interpolirate s polinomom pete stopnje  $p_{5,h}$  na intervalu  $[0, h]$ ,  $h > 0$ , tako, da interpolirate vrednost, prvi odvod in drugi odvod v točkah 0 in  $h$ .

a) Čim bolj natančno ocenite

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - p_{5,1}(x)|.$$

b) Kolikšen je lahko največ  $h$ , da je gotovo

$$\max_{x \in [0,h]} |f(x) - p_{5,h}(x)| \leq 10^{-3}?$$

$$a) \quad |f(x) - p_{5,1}(x)| \leq \frac{|f^{(6)}(\xi)|}{6!} |x^3(x-1)^3|$$

$$|f^{(6)}(\xi)| = e^{-\xi} \Rightarrow |f^{(6)}(\xi)| \leq 1$$

$$(x^3(x-1)^3)' = 3x^2(x-1)^3 + x^3 \cdot 3(x-1)^2 = 3x^2(x-1)^2(x-1+x)$$

$$\Rightarrow \text{skrajšan je pri } x = \frac{1}{2} \quad \text{in } 7 \text{ maša } \left| \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \right| = \frac{1}{64}$$

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - p_{5,1}(x)| \leq \frac{1}{720} \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{46080} \approx 2.1 \cdot 10^{-5}$$

b) Podobno kot v a) dobimo

$$|f(x) - p_{5,h}(x)| \leq \frac{1}{720} \frac{h^6}{64} \Rightarrow \frac{h^6}{720 \cdot 64} \leq 10^{-3}$$

$$h^6 \leq \frac{720 \cdot 64}{1000}$$

$$h^* \leq \sqrt[6]{\frac{720 \cdot 64}{1000}}$$

$$h \leq 1,893$$

## Naloga 4 [25 točk]

Začetni problem

$$y' = -x \sin y, \quad y(0) = 1,$$

rešujete z implicitno metodo

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} (f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})).$$

Izračunajte približek za  $y(0.5)$ , če je  $h = 0.5$ . Ustrezno nelinearno enačbo rešujte z navadno iteracijo (naredite vsaj tri korake).

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{4} (0 \cdot \sin(1) + (-0.5 \sin y_1))$$

$$y_1 = 1 - \frac{1}{8} \sin y_1$$

Za začetni približek vzamemo kar  $y_1^{(0)} = y_0 = 1$ .

$$y_1^{(1)} = 1 - \frac{1}{8} \sin y_1^{(0)} = 0.8948$$

$$y_1^{(2)} = 1 - \frac{1}{8} \sin y_1^{(1)} = 0.9025$$

$$y_1^{(3)} = 1 - \frac{1}{8} \sin y_1^{(2)} = 0.9018$$

$$y_1^{(4)} = 1 - \frac{1}{8} \sin y_1^{(3)} = 0.9019$$

⋮