2. sklop dodatnih vaj iz Analize 2

(1) Razišči konvergenco vrst:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{n}}{(n+2)\sqrt[3]{n+1}}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n^3+1)}{(2n)^n}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$,

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$.

Rešitev:

(a) vrsta divergira,

(b) vrsta konvergira,

(c) vrsta divergira,

(d) vrsta konvergira,

(e) vrsta konvergira,

(f) vrsta konvergira,

(2) Izračunaj konvergenčne polmere naslednjih potenčnih vrst:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!x^{n!}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

Rešitev:

(a) $R = 1$,

(b) $R = \infty$,

(c) $R = 1$.

(3) Dana je funkcija

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-2)^2}.$$

(a) Razvij funkcijo f v Taylorjevo vrsto okrog točke $x = 1$.

(b) Izračunaj $f^{(2012)}(1)$.

Rešitev:

(a) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(3n+2)(x-1)^n$,

(b) $f^{(2012)}(1) = 2012! \cdot 6038$.

(4) Izračunaj vsote naslednjih vrst:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Rešitev:

(a) $S = \ln \frac{3}{2}$,

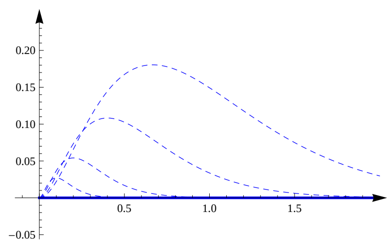
(b) $S = 1 - 2\ln 2$,

(c) $S = 2$.

(5) Dano je zaporedje funkcij $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, kjer je $f_n(x) = nx^2 e^{-nx}$.

(a) Določi limitno funkcijo $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

(b) Ali zaporedje (f_n) enakomerno konvergira k funkciji f?



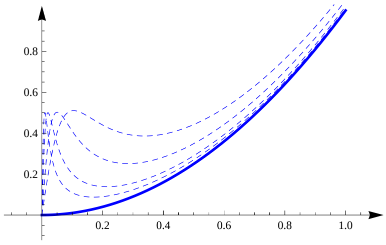
Rešitev: Zaporedje (f_n) konvergira enakomerno k funkciji $f(x) = 0$.

(6) Dano je zaporedje funkcij $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, kjer je $f_n(x) = \frac{nx+x^2+n^2x^4}{1+n^2x^2}$.

(a) Določi limitno funkcijo $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

(b) Ali velja $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$?

(c) Ali zaporedje (f_n) enakomerno konvergira k funkciji f?



Rešitev:

(a) Zaporedje (f_n) konvergira k funkciji $f(x) = x^2$.

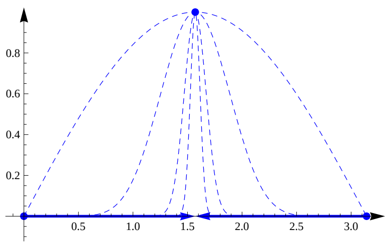
(b) Da.

(c) Ne.

(7) Dano je zaporedje funkcij $f_n : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, podanih s predpisi $f_n(x) = \sin^n(x)$.

(a) Določi limitno funkcijo $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

(b) Pokaži, da zaporedje (f_n) ne konvergira enakomerno.



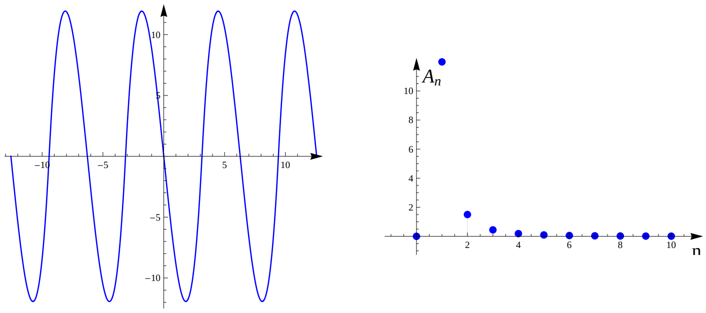
Rešitev:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ;\ x = \frac{\pi}{2}, \\ 0 & ;\ x \neq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

(8) Dokaži, da vsota vrste $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$ določa zvezno funkcijo $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ in nato izračunaj predpis za funkcijo f.

Rešitev: $f(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$.

(9) Razvij funkcijo $f(x) = x(x^2 - \pi^2)$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.



Rešitev:

$$f(x) = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx).$$

(10) S pomočjo razvoja funkcije $f(x) = x^4$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$ pokaži, da velja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

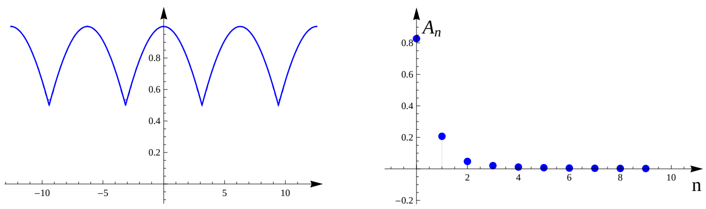
(11) Naj bo $f(x) = \cos(ax)$ za nek $a \notin \mathbb{Z}$.

(a) Razvij funkcijo f v kompleksno obliko Fourierove vrste na intervalu $[-\pi, \pi]$.

(b) Razvij funkcijo f v realno obliko Fourierove vrste na intervalu $[-\pi, \pi]$.

(c) Izračunaj vsoto $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a+k}$.

Slika za $a = \frac{1}{3}$:



Rešitev:

(a) $\displaystyle f(x) = \frac{a \sin(\pi a)}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^k}{a^2 - k^2} e^{ikx}$,

(b) $\displaystyle f(x) = \frac{\sin(\pi a)}{\pi a} + \frac{2a \sin(\pi a)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2} \cos(nx)$,

(c) $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a+k} = \pi \operatorname{ctg}(\pi a)$.

(12) Reši diferencialne enačbe prvega reda:

(a) $(2x-1)(y^2-1)y' + (x-1)y = 1-x$,
(b) $y' = 4xy^2$, $y(1) = 1$,
(c) $\cos x y' + \sin x y = 1$, $y(0) = 5$,
(d) $x^2 y' + 2xy = 1$, $y(1) = 2$,
(e) $y' + y = xy^2$, $y(0) = 1$.

Rešitev:

(a) $y(x) = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}\ln|2x-1| - x + C}$,
(b) $y(x) = \frac{1}{3-2x^2}$,
(c) $y(x) = 5\cos x + \sin x$,
(d) $y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$,
(e) $y(x) = \frac{1}{1+x}$.

(13) Privzemimo, da je rast števila prebivalcev v nekem mestu sorazmerna s številom prebivalcev. V letu 2000 je živelo v mestu 400000 prebivalcev. Oceni število prebivalcev v letu 2050, če veš, da je koeficient sorazmernosti med številom prebivalcev in rastjo prebivalstva enak $k = 0,015$.

Rešitev: $P(t) = 400000e^{k(t-2000)}$, $P(2050) \approx 846800$.

(14) Oglaševalna agencija poskuša preko oglasov predstaviti svoj novi artikel populaciji, ki zajema 1000000 ljudi. Privzemimo, da je število ljudi, ki na novo spoznajo artikel, sorazmerno s številom ljudi, ki ga še ne poznajo in da na začetku oglaševanja artikla ne pozna nihče.

(a) Zapiši diferencialno enačbo, ki modelira število ljudi, ki poznajo artikel.
(b) Po koncu prvega leta oglaševanja je za artikel čulo 500000 ljudi. Koliko ljudi bo artikel poznalo po dveh letih?

Rešitev:

(a) $\dot{P} = k(1000000 - P)$,
(b) $P(t) = 1000000(1 - 2^{-t})$, $k = \ln 2$, $P(2) = 750000$.

(15) Reši diferencialne enačbe drugega reda:

(a) $y'' + 6y' + 8y = 7\sin x + 6\cos x$,
(b) $y'' + 4y = 4 + 8\cos 2x$,
(c) $y'' - y' = 1 + e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,
(d) $y'' + 2y' + y = 25e^x \sin x$, $y(0) = -4$, $y'(0) = -1$.

Rešitev:

(a) $y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-2x} + \sin x$,
(b) $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 1 + 2x \sin 2x$,
(c) $y(x) = 1 - x + xe^x$,
(d) $y(x) = 3e^x \sin x - 4e^x \cos x$.