Analiza 2
Rešitve 13. sklopa nalog

Navadne diferencialne enačbe prvega reda

(6) Radioaktivni izotop ogljika ^{14}C razpada s hitrostjo, ki je sorazmerna trenutni količini ogljika. Sorazmernostna konstanta je $\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$, kjer je $t_{1/2} = 5700$ let razpolovni čas.

(a) Zapiši diferencialno enačbo, ki modelira količino radioaktivnega izotopa ogljika.

(b) Določi starost fosila, če veš, da vsebuje 10% prvotne količine radioaktivnega izotopa ogljika ^{14}C.

Rešitev: (a) Radioaktivna snov razpada s hitrostjo, ki je sorazmerna s trenutno količino snovi. To pomeni, da velja

$$\dot{N}(t) = -\lambda N(t).$$

Pri tem uporabljamo oznake:

- $N(t)$ količina radioaktivne snovi ob času t,
- λ razpadna konstanta,
- N_0 začetna količina radioaktivne snovi.

(b) Splošna rešitev te diferencialne enačbe je $N(t) = Ce^{-\lambda t}$, če upoštevamo začetni pogoj, pa dobimo, da velja

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

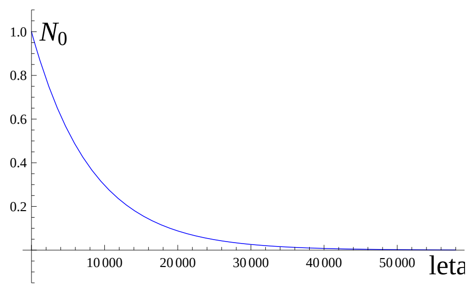
Razpolovni čas $t_{1/2}$ dane radioaktivne snovi je čas, v katerem razpade polovica začetne snovi. Če vemo, kakšen je razpolovni čas, lahko izračunamo razpadno konstanto po formuli

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}.$$

Starost fosila T mora zadoščati enačbi $N(T) = \frac{N_0}{10}$. Sledi:

$$\begin{aligned} N_0 e^{-\lambda T} &= \frac{N_0}{10}, \\ \lambda T &= \ln 10, \\ T &= \frac{\ln 10}{\lambda} = \frac{\ln 10}{\ln 2} \cdot 5700. \end{aligned}$$

Od tod lahko ocenimo, da je starost fosila približno 19000 let.



<u>Opomba</u>: Obratno vrednost razpadne konstante λ označimo s τ in jo imenujemo razpadni čas. Razpadni čas je povprečna življenska doba enega delca radioaktivne snovi. □

(7) Na banko naložimo 1000 evrov. Privzemimo, da je letna obrestna mera 5%, obresti pa se izračunavajo po relativni obrestni meri. Izračunaj vrednost glavnice po 5 letih, če se obresti kapitalizirajo letno, mesečno, dnevno in zvezno.

Rešitev: Označimo z G_0 začetno vrednost glavnice in naj bo p letna obrestna mera. Če se obresti kapitalizirajo n-krat letno, se glavnica vsako leto n-krat poveča za p/n procentov. To pomeni, da je vrednost glavnice po t letih, če vsako leto obresti kapitaliziramo n-krat, enaka

$$G_n(t) = G_0 \left(1 + \frac{p}{n}\right)^{nt}.$$

Pri posameznih kapitalizacijskih dobah bi tako po petih letih imeli na računu

$$\begin{aligned} G_1(5) &= 1000 \left(1 + \frac{0.05}{1}\right)^{5} = 1276.28, \\ G_{12}(5) &= 1000 \left(1 + \frac{0.05}{12}\right)^{60} = 1283.36, \\ G_{365}(5) &= 1000 \left(1 + \frac{0.05}{365}\right)^{1825} = 1284, \end{aligned}$$

evrov. Pri zvezni kapitalizaciji, bi vrednost glavnice zadoščala diferencialni enačbi

$$\dot{G}_\infty = p\, G_\infty,$$

katere rešitev je $G_\infty(t) = G_0 e^{pt}$. Od tod sledi

$$G_\infty(5) = 1000 e^{0.25} = 1284.03$$

evrov. Vidimo, da razlike med posameznimi kapitalizacijskimi dobami (z upoštevanjem relativne obrestne mere pri fiksni letni obrestni meri) niso zelo velike. Pri čedalje pogostejši kapitalizaciji obresti se končna vrednost glavnice približuje vrednosti v zveznem primeru. □

(8) Privzemimo, da je rast števila prebivalcev na našem planetu sorazmerna s produktom trenutnega števila prebivalcev in trenutne zasedenosti planeta.

(a) Zapiši diferencialno enačbo, ki modelira število prebivalstva na planetu Zemlja.

(b) Denimo, da je koeficient sorazmernosti enak $r = 0.03$ in da je maksimalno število prebivalcev na našem planetu enako $K = 12$ milijard. Oceni število prebivalcev na našem planetu leta 2050, če je bilo na Zemlji leta 2011 sedem milijard prebivalcev.

Rešitev: (a) Pri tej nalogi bomo spoznali Verhulstov model rasti. Predpostavili bomo, da funkcija $P(t)$ števila prebivalcev ob času t zadošča diferencialni enačbi

$$\dot{P} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right).$$

Konstanti r in K interpretiramo kot:

- r koeficient sorazmernosti,
- K maksimalno število prebivalcev na danem območju.

Tej enačbi pogosto rečemo logistična enačba, njenim rešitvam pa logistične krivulje.

(b) Najprej poiščimo splošno rešitev logistične diferencialne enačbe

$$
\begin{aligned}
\dot{P} &= rP\left(1 - \frac{P}{K}\right), \\
\frac{dP}{P\left(1 - \frac{P}{K}\right)} &= r\,dt, \\
\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K-P}\right) dP &= r\,dt, \\
\ln\left|\frac{P}{K-P}\right| &= rt + \ln C, \\
P &= (K-P)Ce^{rt}, \\
P(1 + Ce^{rt}) &= KCe^{rt}, \\
P &= \frac{KCe^{rt}}{1 + Ce^{rt}}.
\end{aligned}
$$

Z upoštevanjem začetnega pogoja $P(2011) = 7$ dobimo iz enačbe $P = (K-P)Ce^{rt}$ vrednost

$$
C = \frac{P(2011)}{K - P(2011)} e^{-2011r} = \frac{7}{5} e^{-2011r}.
$$

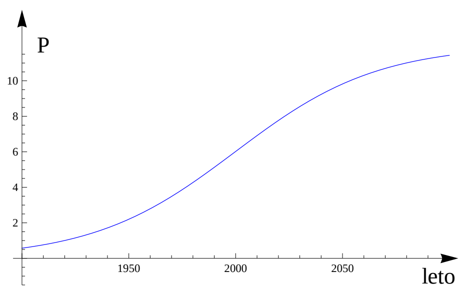
Število prebivalstva se torej spreminja po formuli

$$
P(t) = \frac{12 \cdot \frac{7}{5} e^{r(t-2011)}}{1 + \frac{7}{5} e^{r(t-2011)}} = \frac{84 e^{0.03(t-2011)}}{5 + 7e^{0.03(t-2011)}}.
$$

Število prebivalstva se asimptotično približuje k številu

$$
\lim_{t\to\infty} P(t) = K,
$$

na spodnji sliki pa je narisan graf funkcije P.



Po tej oceni bo leta 2050 na Zemlji 9.8 milijard ljudi.

Opomba: Zavedati se moramo, da ta model zagotovo ni povsem realističen, poleg tega pa smo morali narediti tudi oceno pri izbiri parametrov K in r. Približno ju lahko določimo tako, da upoštevamo znane podatke o rasti prebivalstva v preteklosti in poskušamo najti logistično krivuljo, ki najbolje aproksimira dane podatke. $\square$

(9) Padalec skoči iz letala in nato pada pod vplivom sile teže in sile zračnega upora.

(a) Zapiši diferencialno enačbo, ki modelira hitrost padalca med padanjem in jo reši.

(b) Kolikšna je padalčeva končna hitrost?

Rešitev: (a) Gibanje padalca določa drugi Newtonov zakon, ki se v tem primeru glasi

$$m\dot{v} = mg - \frac{1}{2}\rho A C_d v^2.$$

Z v smo označili hitrost padalca v navpični smeri, člena na desni pa ustrezata sili teže $F_g = mg$ ter sili zračnega upora $F_{upora} = -\frac{1}{2}\rho A C_d v^2$. Koeficienti, ki nastopajo v enačbi, imajo naslednji pomen:

- m masa padalca,
- ρ gostota zraka,
- A ploščina prereza padalca,
- C_d koeficient zračnega upora,
- g težni pospešek.

Da si malce poenostavimo računanje, uvedimo oznako $\alpha = \frac{\rho A C_d}{2m}$. Po deljenju z m se enačba prevede v diferencialno enačbo z ločljivimi spremenljivkami

$$\dot{v} = g - \alpha v^2,$$

$$\frac{dv}{g - \alpha v^2} = dt.$$

Racionalno funkcijo na levi lahko razcepimo na parcialna ulomka in dobimo

$$\frac{1}{g - \alpha v^2} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \left(\frac{1}{\sqrt{g} - \sqrt{\alpha} v} + \frac{1}{\sqrt{g} + \sqrt{\alpha} v} \right).$$

Z integriranjem tako pridemo do enakosti

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha g}} \ln \frac{\sqrt{g} + \sqrt{\alpha} v}{\sqrt{g} - \sqrt{\alpha} v} = t + C.$$

Če upoštevamo, da je na začetku hitrost padalca enaka $v(0) = 0$, dobimo $C = 0$, kar nam da

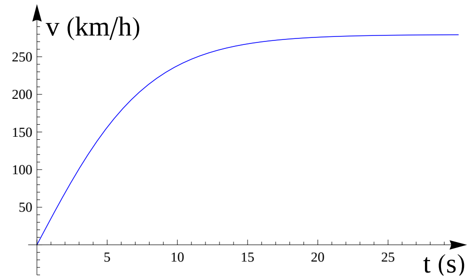
$$\ln \frac{\sqrt{g} + \sqrt{\alpha} v}{\sqrt{g} - \sqrt{\alpha} v} = 2\sqrt{\alpha g} t.$$

Iz te enačbe lahko sedaj eksplicitno izrazimo $v(t)$. Rešitev je enaka

$$v(t) = \sqrt{\frac{2mg}{\rho A C_d}} \cdot \frac{e^{2\sqrt{\frac{\rho A C_d g}{2m}} t} - 1}{e^{2\sqrt{\frac{\rho A C_d g}{2m}} t} + 1}$$

(b) V limiti dobimo končno hitrost padalca $v_k = \lim_{t \to \infty} v(t) = \sqrt{\frac{2mg}{\rho A C_d}}$.

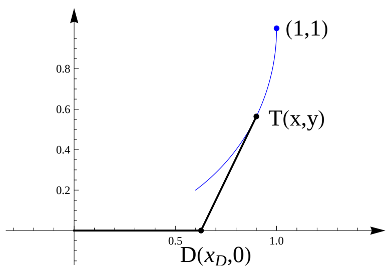
Poglejmo si še primer s konkretnimi številkami. Vzemimo, da ima padalec $80kg$ in da je $\rho = 1.3 kg/m^3$, $g = 9.8 m/s^2$. Denimo še, da je padalec med padanjem v navpični legi. Potem je $C_d \approx 1$, čelni prerez pa je $A \approx 0.2 m^2$. Pri teh podatkih bi bila končna hitrost padalca $v_k \approx 280 km/h$, dosegel pa bi jo v približno $20s$, kot kaže spodnji graf.



$\square$

(10) Poišči krivuljo v ravnini, ki gre skozi točko $(1, 1)$ in ki ima lastnost, da je za vsako točko T na krivulji trikotnik ODT enakokrak z vrhom pri D. Z D označimo presečišče tangente na krivuljo v točki T z abscisno osjo.

Rešitev: Naj bo $T(x, y)$ točka na krivulji in $D(x_D, 0)$ presečišče abscisne osi s tangento na krivuljo v točki T.



Enačba tangente na krivuljo v točki T je enaka

$$Y - y = y'(X - x).$$

Od tod sledi, da je

$$x_D = x - \frac{y}{y'}.$$

Če sedaj upoštevamo pogoj, da mora biti $|OD| = |DT|$, pridemo do enačbe:

$$\begin{aligned} x_D^2 &= (x - x_D)^2 + y^2, \\ \left(x - \frac{y}{y'}\right)^2 &= \frac{y^2}{y'^2} + y^2, \\ x^2 - \frac{2xy}{y'} &= y^2. \end{aligned}$$

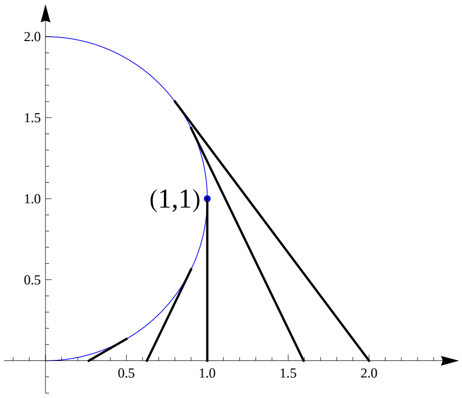
Od tod sledi, da naša krivulja zadošča diferencialni enačbi

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

To je homogena diferencialna enačba prvega reda, katere rešitve so krožnice oblike

$$x^2 + (y - D)^2 = D^2.$$

Skozi točko $(1, 1)$ gre krožnica, ki ustreza parametru $D = 1$, rešitev naše naloge pa je desna polovica krožnice $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.



$\square$