

ANALIZA 1
2. domača naloga

(1) S popolno indukcijo pokaži, da za vsako naravno število n veljata enakosti

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2,$$
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n - 1)^2 = \frac{(2n - 1)2n(2n + 1)}{6}.$$

(2) Dokaži, da je za vsako naravno število $n \geq 2$ število $2^{2^n} - 1$ deljivo s 15.

(3) Pokaži, da za vsako realno število x in za vsako naravno število n velja

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) \cdots (1 + x^{2^{n-1}}) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2^n - 2} + x^{2^n - 1}.$$

(4) Pokaži, da za vsako celo število n obstajata celi števili a in b , da velja $(1 + \sqrt{2})^n = a + b\sqrt{2}$.

(5) Pokaži, da je za vsako naravno število n izraz $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ deljiv s 54.

(6) Naj bo $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2^m} | k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$. Pokaži, da za vsako naravno število $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 2^2\alpha} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2^n\alpha}.$$

(7) Naj bo $h \in [0, 1]$. Pokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $(1 + h)^n \leq 1 + (2^n - 1)h$.

(8) Pokaži, da je za vsako naravno število n število $1 + 2^{3n+1} + 2^{6n+2}$ deljivo s 7.

(9)* Pokaži, da za vsako naravno število n , velja

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} \leq n.$$

(10) Pokaži:

(a) Za poljubni realni števili x, y velja $|\sin(x + y)| \leq |\sin x| + |\sin y|$.

(b) Za vsak $x \in \mathbb{R}$ in $n \in \mathbb{N}$ velja $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$. Ali ta neenakost velja za poljuben pozitiven n ?

(11)* Naj bodo $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ pozitivna realna števila in naj bo $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$. Pokaži, da velja

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq \frac{n^2}{s_n}.$$