

Analiza 1

Kompleksna števila in množice

(1) Reši v obsegu kompleksnih števil dani enačbi:

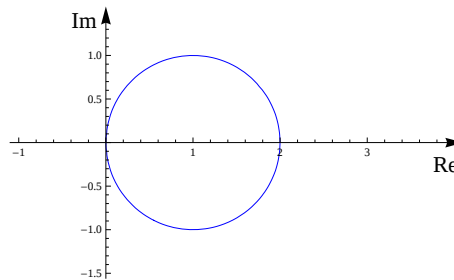
(a) $|z + 1| = |2z - 1|$,

(b) $z^2 + 2i\operatorname{Re}z = |z|$.

Rešitev: (a) Pišimo $z = x + iy$ in računajmo:

$$\begin{aligned}|z + 1| &= |2z - 1|, \\|x + iy + 1| &= |2x + 2iy - 1|, \\ \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} &= \sqrt{(2x - 1)^2 + 4y^2}, \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 &= 4x^2 - 4x + 1 + 4y^2, \\ 0 &= 3x^2 - 6x + 3y^2, \\ 1 &= (x - 1)^2 + y^2.\end{aligned}$$

Vidimo, da je to krožnica s središčem v točki $S(1, 0)$ in s polmerom $R = 1$.



(b) Naj bo $z = x + iy$. Sledi:

$$\begin{aligned}z^2 + 2i\operatorname{Re}z &= |z|, \\ (x + iy)^2 + 2ix &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ x^2 + 2ixy - y^2 + 2ix &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ (x^2 - y^2) + i(2xy + 2x) &= \sqrt{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Če primerjamo realni in imaginarni komponenti obeh strani enačbe, dobimo naslednji sistem realnih enačb:

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ 2xy + 2x &= 0.\end{aligned}$$

Druga enačba se prevede v enačbo

$$x(y + 1) = 0.$$

Torej mora veljati bodisi $x = 0$ bodisi $y = -1$. Če je $x = 0$, iz prve enačbe sledi, da mora biti tudi $y = 0$. Če je $y = -1$, pa iz prve enačbe sledi:

$$\begin{aligned}x^2 - 1 &= \sqrt{x^2 + 1}, \\x^4 - 2x^2 + 1 &= x^2 + 1, \\x^4 - 3x^2 &= 0, \\x^2(x^2 - 3) &= 0.\end{aligned}$$

Torej mora biti $x = 0$ ali $x = \pm\sqrt{3}$. Preverimo lahko, da rešitev $x = 0$ ne ustreza prvotni enačbi, zato so rešitve enačbe:

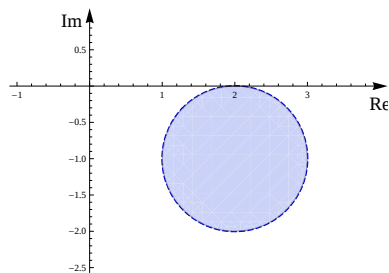
$$\begin{aligned}z_1 &= 0, \\z_2 &= \sqrt{3} - i, \\z_3 &= -\sqrt{3} - i.\end{aligned}$$

□

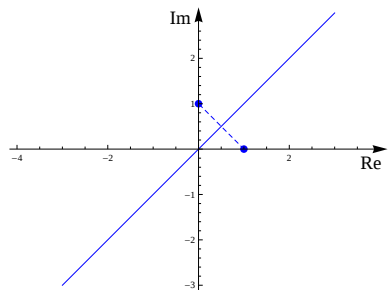
(2) Skiciraj naslednje podmnožice kompleksnih števil. Nalogo poskusi rešiti brez računanja.

- (a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2 + i| < 1\}$,
- (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = |z - i|\}$,
- (c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| + |z - 3| = 4\}$.

Rešitev: (a) Neenačba $|z - 2 + i| < 1$ določa krog s središčem v točki $2 - i$ in s polmerom $R = 1$.



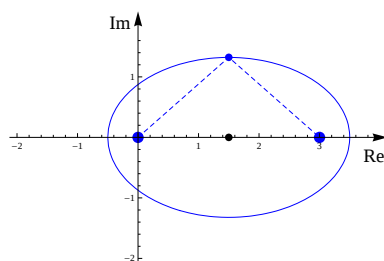
(b) Enačba $|z - 1| = |z - i|$ določa točke, ki so enako oddaljene od števil 1 in i . To so ravno točke na simetrali daljice med tema dvema točkama, ki pa se ujema s simetralo lihih kvadrantov.



Računsko bi lahko do rešitve prišli takole:

$$\begin{aligned} |z - 1| &= |z - i|, \\ \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} &= \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}, \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 &= x^2 + y^2 - 2y + 1, \\ y &= x. \end{aligned}$$

(c) Rešitev enačbe $|z| + |z - 3| = 4$ so vsa kompleksna števila, ki imajo konstantno vsoto oddaljenosti od števil 0 in 3. Če se spomnimo na geometrijsko definicijo elipse, lahko od tod sklepamo, da bomo dobili elipso z goriščema v točkah 0 oziroma 3. Razdalja med tema dvema točkama je enaka dvakratniku linearne ekscentričnosti, kar pomeni, da je $e = \frac{3}{2}$. Dvakratnik velike polosi pa je po drugi strani enak vsoti oddaljenosti od gorišč, kar pomeni, da je $a = 2$. Od tod dobimo še $b^2 = a^2 - e^2 = \frac{7}{4}$. Središče elipse je v razpolovišču daljice med goriščema, ki je v točki $S(\frac{3}{2}, 0)$.



Računsko pa dobimo:

$$\begin{aligned} |z| + |z - 3| &= 4, \\ \sqrt{(x - 3)^2 + y^2} &= 4 - \sqrt{x^2 + y^2}, \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 &= 16 + x^2 + y^2 - 8\sqrt{x^2 + y^2}, \\ 6x + 7 &= 8\sqrt{x^2 + y^2}, \\ 36x^2 + 84x + 49 &= 64x^2 + 64y^2, \\ 28(x - \frac{3}{2})^2 + 64y^2 &= 112, \\ \frac{(x - \frac{3}{2})^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{7}{4}} &= 1. \end{aligned}$$

□

(3) Naj bo z kompleksno število, $z \neq 1$ in $|z| = 1$. Dokaži, da je število $i \frac{z+1}{z-1}$ realno.

Rešitev: Spomnimo se, da je kompleksno število w realno natanko takrat, ko je $w = \bar{w}$. Definirajmo

$$w = i \frac{z + 1}{z - 1}$$

in računajmo:

$$\begin{aligned}
 w &\stackrel{?}{=} \overline{w}, \\
 i \frac{z+1}{z-1} &\stackrel{?}{=} -i \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1}, \\
 (z+1)(\bar{z}-1) &\stackrel{?}{=} -(\bar{z}+1)(z-1), \\
 |z|^2 + \bar{z} - z - 1 &\stackrel{?}{=} -|z|^2 - z + \bar{z} + 1, \\
 |z|^2 - 1 &\stackrel{?}{=} -|z|^2 + 1.
 \end{aligned}$$

Ker je $|z| = 1$, zadnja enakost drži. Torej je število $i \frac{z+1}{z-1}$ realno. □

(4) Z uporabo de Moivreove formule izračunaj naslednji kompleksni števili:

(a) $z = (1 + i\sqrt{3})^{42}$,

(b) $z = \frac{1}{(1+i)^8}$.

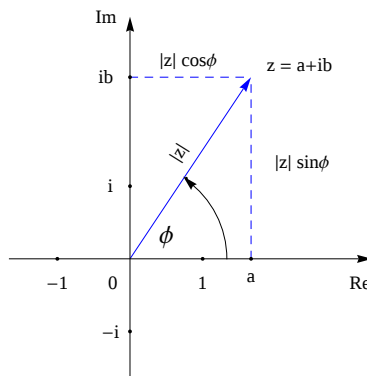
Rešitev: Poleg kartezičnega zapisa kompleksnega števila $z = a + ib$ nam pri računanju pogosto prideta prav polarni zapis

$$z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$$

in pa Eulerjev zapis

$$z = |z|e^{i\phi},$$

kjer je $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ absolutna vrednost, ϕ pa argument (polarni kot) števila z .



Za nas bo Eulerjev zapis zaenkrat le primeren pripomoček za računanje, ko se bomo naučili potencirati na kompleksne eksponente, pa bomo dokazali, da velja Eulerjeva formula

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi.$$

S pomočjo de Moivreove formule lahko računamo potence kompleksnih števil. Če je namreč $z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi) = |z|e^{i\phi}$, potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$z^n = |z|^n(\cos n\phi + i \sin n\phi) = |z|^n e^{in\phi}.$$

(a) Pišimo $w = 1 + i\sqrt{3}$. Potem je $|w| = 2$ in $\phi = \frac{\pi}{3}$. Po de Moivrovi formuli sledi

$$z = w^{42} = 2^{42} \left(\cos \frac{42\pi}{3} + i \sin \frac{42\pi}{3} \right) = 2^{42}.$$

(b) Naj bo sedaj $w = 1 + i$. Potem je $|w| = \sqrt{2}$, $\phi = \frac{\pi}{4}$ in

$$z = \frac{1}{w^8} = \frac{1}{16 \left(\cos \frac{8\pi}{4} + i \sin \frac{8\pi}{4} \right)} = \frac{1}{16}.$$

□

(5) Reši v obsegu kompleksnih števil enačbi:

(a) $z^6 = 1$,

(b) $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$.

Rešitev: V realnem ima enačba $x^n = a$ za poljuben $a > 0$ natanko eno pozitivno rešitev, ki ji rečemo n -ti koren števila a in jo označimo z $\sqrt[n]{a}$.

V kompleksnem pa ima enačba $z^n = a$ za poljubno neničelno kompleksno število a natanko n različnih rešitev. Posebej pomembne so rešitve enačbe

$$z^n = 1,$$

ki jim rečemo n -ti koreni enote.

(a) Iščemo rešitve enačbe $z^6 = 1$. Pišimo $z = |z|e^{i\phi}$. Sledi

$$|z|^6 e^{i6\phi} = 1 \cdot e^{i2k\pi}.$$

Vidimo, da je:

$$\begin{aligned} |z| &= 1, \\ \phi &= \frac{k\pi}{3}. \end{aligned}$$

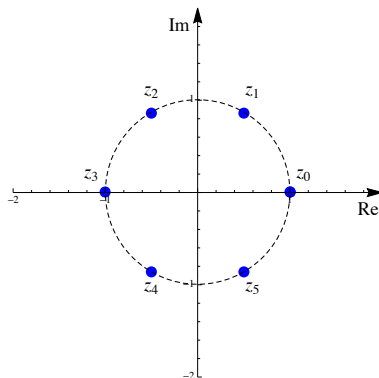
Ker nas zanimajo polarni koti $\phi \in [0, 2\pi)$, pridejo v poštev samo $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Rešitve enačbe so

$$z_k = e^{\frac{k\pi i}{3}}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Eksplisitno so to števila:

$$\begin{aligned} z_0 &= 1, \\ z_1 &= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_2 &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_3 &= -1, \\ z_4 &= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_5 &= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Geometrijsko so rešitve enačbe $z^6 = 1$ oglišča enakostraničnega šestkotnika, ležijo pa na enotski krožnici.



Opomba: Za splošen n tvorijo n -ti koreni enote oglišča enakostraničnega n -kotnika. Eno izmed oglišč je zmeraj $z_0 = 1$. Če je n lih, je to hkrati tudi edini realni koren enačbe $z^n = 1$. Če je n sod, pa je realen še $z_{\frac{n}{2}} = -1$.

(b) Rešimo še enačbo $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$. Najprej moramo desno stran zapisati v Eulerjevi obliki

$$-8 + 8\sqrt{3}i = 16e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Če pišemo $z = |z|e^{i\phi}$, dobimo

$$|z|^4 e^{i4\phi} = 16 \cdot e^{i(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi)}.$$

Od tod dobimo:

$$\begin{aligned} |z| &= 2, \\ \phi &= \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \end{aligned}$$

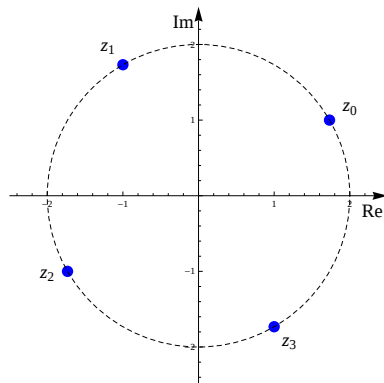
za $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Rešitve enačbe so torej

$$z_k = 2e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2})}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

EksPLICITNO so to števila:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{3} + i, \\ z_1 &= -1 + i\sqrt{3}, \\ z_2 &= -\sqrt{3} - i, \\ z_3 &= 1 - i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Rešitve enačbe tokrat tvorijo oglišča kvadrata in ležijo na krožnici s polmerom 2. Kvadrat je zavrten za kot $\frac{\pi}{6}$ glede na koordinatne osi.



Opomba: n -te korene kompleksnega števila a lahko dobimo tudi na naslednji način. Če pišemo $a = |a|e^{i\phi}$, je $z_0 = \sqrt[n]{|a|}e^{\frac{i\phi}{n}}$ eden izmed n -tih korenov števila a . Preostale n -te korene dobimo, če z_0 pomnožimo z n -timi koreni enote. Vidimo, da n -ti koreni števila a določajo oglišča enakostraničnega n -kotnika, ki leži na krožnici s središčem v 0 in s polmerom $\sqrt[n]{|a|}$. Glede na standardni n -kotnik korenov enote je ta n -kotnik zavrten za kot $\frac{\phi}{n}$. $\square$

(6) Reši enačbo $z^n = \bar{z}$ za $n \geq 2$.

Rešitev: Rešujemo enačbo $z^n = \bar{z}$. Ena rešitev je $z = 0$, zato v nadaljevanju privzemimo, da je $z \neq 0$. Če enačbo $z^n = \bar{z}$ pomnožimo z z , dobimo:

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= |z|^2, \\ |z|^{n+1}e^{i(n+1)\phi} &= |z|^2e^{i2k\pi}. \end{aligned}$$

Od tod dobimo, da je $|z| = 1$ in $\phi = \frac{2k\pi}{n+1}$ za $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Rešitve enačbe so torej

$$z \in \left\{ 0, 1, e^{\frac{2\pi i}{n+1}}, e^{\frac{4\pi i}{n+1}}, \dots, e^{\frac{2n\pi i}{n+1}} \right\}.$$

Geometrično so to poleg koordinatnega izhodišča oglišča pravilnega $(n+1)$ -kotnika na enotski krožnici. $\square$

(7) Reši v obsegu kompleksnih števil enačbi:

(a) $z^3 + 3z^2 + z - 5 = 0$,

(b) $z^2 - (1 - 4i)z - 5 - 5i = 0$.

Rešitev: (a) Polinomska enačba stopnje n ima po osnovnem izreku algebre n kompleksnih ničel. Kakšna je lahko večkratna, najpogosteje pa so vse paroma različne. Če ima polinom realne koeficiente, nastopajo kompleksne ničle v konjugiranih parih.

Kubična enačba $z^3 + 3z^2 + z - 5 = 0$ ima tri ničle. Preverimo lahko, da je ena izmed njih $z_1 = 1$. Z uporabo Hornerjevega algoritma nato dobimo razcep

$$z^3 + 3z^2 + z - 5 = (z - 1)(z^2 + 4z + 5).$$

Kvadratni člen na desni ima dve kompleksni ničli:

$$z_2 = -2 + i,$$

$$z_3 = -2 - i,$$

ki sta paroma konjugirani.

(b) Rešujemo kompleksno kvadratno enačbo

$$z^2 - (1 - 4i)z - 5 - 5i = 0.$$

Njeni rešitvi sta

$$z_{1,2} = \frac{1 - 4i \pm \sqrt{(1 - 4i)^2 + 4(5 + 5i)}}{2} = \frac{1 - 4i \pm \sqrt{5 + 12i}}{2}.$$

Kvadratni koren $\sqrt{5 + 12i}$ moramo sedaj izračunati v kompleksnem. Recimo, da računamo koren kompleksnega števila $z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$. Če je $z \neq 0$, ima z dva kvadratna korena, ki sta določena z izrazom

$$\sqrt{z} = \pm \sqrt{|z|}(\cos \frac{\phi}{2} + i \sin \frac{\phi}{2}).$$

To število lahko natančno izračunamo z uporabo trigonometričnih formul:

$$\begin{aligned}\cos \frac{\phi}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \phi}{2}}, \\ \sin \frac{\phi}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \phi}{2}}.\end{aligned}$$

Predznaka izberemo z upoštevanjem kvadranta, v katerem leži število z .

V našem primeru je $|z| = \sqrt{25 + 144} = 13$ in $\cos \phi = \frac{x}{|z|} = \frac{5}{13}$. Ker število z leži v prvem kvadrantu, bomo obakrat vzeli predznak plus, da dobimo:

$$\begin{aligned}\cos \frac{\phi}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{13}}, \\ \sin \frac{\phi}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{4}{13}}.\end{aligned}$$

Od tod sledi, da je

$$\sqrt{5 + 12i} = \pm \sqrt{13}(\sqrt{\frac{9}{13}} + i\sqrt{\frac{4}{13}}) = \pm(3 + 2i).$$

Rešitvi kvadratne enačbe sta torej:

$$\begin{aligned}z_1 &= 2 - i, \\ z_2 &= -1 - 3i.\end{aligned}$$

□

(8) Dokaži, da za vsa neničelna kompleksna števila z velja

$$\left| \frac{z}{|z|} - 1 \right| \leq \arg z.$$

Nalogo poskusi rešiti geometrijsko.

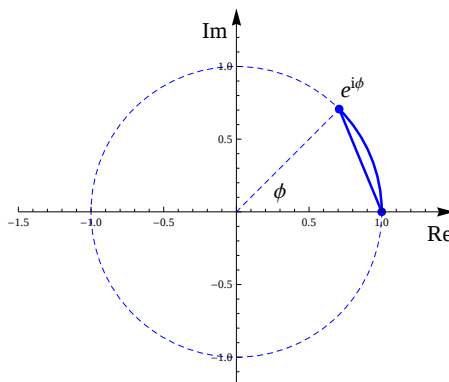
Rešitev: Tokrat si bomo pomagali z zapisom kompleksnega števila v Eulerjevi obliki. Naj bo $z = |z|e^{i\phi}$. Potem je

$$\left| \frac{z}{|z|} - 1 \right| = |e^{i\phi} - 1|,$$

kar pomeni, da dokazujemo neenakost

$$|e^{i\phi} - 1| \leq \phi.$$

Izraz na levi je enak dolžini daljice med točkama $e^{i\phi}$ in 1 v kompleksni ravnini. Ker ti dve točki ležita na enotski krožnici, pa je kot ϕ enak kar dolžini loka med njima. Ker je daljica najkrajša pot med dvema točkama, velja dana neenakost.



□

(9) Naj bosta $a \neq 0$ in b kompleksni števili. Dokaži, da ima enačba $z^2 - 2az + b = 0$ obe rešitvi na enotski krožnici natanko tedaj, kadar je $|a| \leq 1$, $|b| = 1$ in $e^{i \arg b} = e^{2i \arg a}$.

Rešitev: Kadar dokazujemo ekvivalenco dveh trditev, moramo dokazati implikaciji v obe smeri.

($\Leftarrow$) Denimo najprej, da velja $|a| \leq 1$, $|b| = 1$ in $e^{i \arg b} = e^{2i \arg a}$. Potem lahko zapišemo:

$$\begin{aligned} a &= |a|e^{i\phi}, \\ b &= e^{2i\phi} \end{aligned}$$

za nek $\phi = \arg a$. V tem primeru sta rešitvi kvadratne enačbe $z^2 - 2az + b = 0$ števili

$$z_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4b}}{2} = |a|e^{i\phi} \pm \sqrt{|a|^2 e^{2i\phi} - e^{2i\phi}} = e^{i\phi}(|a| \pm \sqrt{|a|^2 - 1}).$$

Prvi faktor leži na enotski krožnici, zato moramo pokazati še, da leži tudi člen

$$|a| \pm \sqrt{|a|^2 - 1}$$

na enotski krožnici. Ker je $|a| \leq 1$, je $1 - |a|^2 \geq 0$, zato lahko to število zapišemo v kartezični obliki

$$|a| \pm \sqrt{|a|^2 - 1} = |a| \pm i\sqrt{1 - |a|^2}.$$

Od tod pa takoj sledi, da je absolutna vrednost tega števila enaka 1, kar smo želeli pokazati.

($\Rightarrow$) Sedaj privzemimo, da ležita rešitvi enačbe $z^2 - 2az + b = 0$ na enotski krožnici. Potem ju lahko zapišemo v obliki:

$$z_1 = e^{i\phi_1},$$

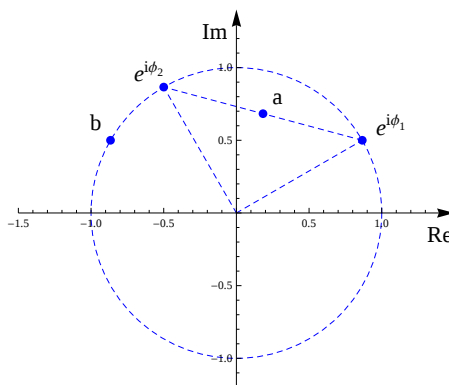
$$z_2 = e^{i\phi_2}$$

za neka $\phi_1, \phi_2 \in [0, 2\pi)$. Privzamemo lahko, da je $\phi_1 \leq \phi_2$. Z uporabo Vietovih formul dobimo:

$$z_1 + z_2 = 2a,$$

$$z_1 z_2 = b.$$

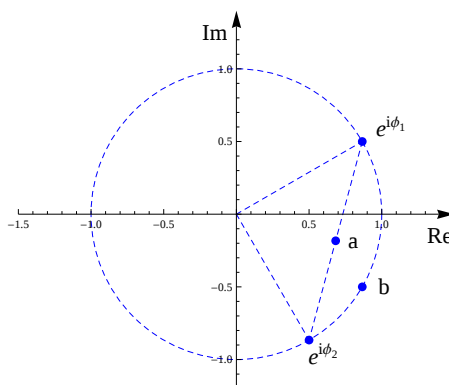
Sedaj bomo poskusili ti dve enačbi interpretirati geometrično. Poglejmo si skico v primeru, ko je $\phi_2 - \phi_1 < \pi$.



Vidimo, da je točka a razpolovišče daljice med z_1 in z_2 . Od tod takoj sledi, da je $|a| \leq 1$ in da je $\arg a = \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)$. Po drugi strani pa je

$$b = z_1 z_2 = e^{i(\phi_1 + \phi_2)},$$

od koder sledi $\arg b = \phi_1 + \phi_2$ in $|b| = 1$. Torej je $\arg b = 2 \arg a$, kot smo želeli dokazati. Malce drugače pa je treba ravnati v primeru, ko je $\phi_2 - \phi_1 > \pi$.



V tem primeru je:

$$\begin{aligned}\arg a &= \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) + \pi, \\ \arg b &= \phi_1 + \phi_2.\end{aligned}$$

V tem primeru je $\arg b = 2 \arg a + 2\pi$, od koder sledi $e^{i \arg b} = e^{2i \arg a}$.

Opomba: Ker je $a \neq 0$, se ne more zgoditi, da bi bilo $\phi_2 - \phi_1 = \pi$. □

- (10) (a) Poišči oglišča kvadrata v $\mathbb{C}$, ki ima središče v točki $s = 1 + i$, eno izmed oglišč pa v točki $a = 4 + 3i$.
- (b) Vzemimo poljuben štirikotnik v $\mathbb{C}$ in nad vsako njegovo stranico narišimo kvadrat. Središča dobljenih kvadratov označimo z A, B, C in D . Dokaži, da je daljica AC pravokotna na daljico BD in da sta obe daljici enako dolgi.

Rešitev: (a) Vsako orientacijo ohranjajočo podobnostno transformacijo evklidske ravnine lahko predstavimo s kompleksno linearno preslikavo oblike

$$f(z) = az + b,$$

kjer sta $a \neq 0$ in b kompleksni števili. Če pišemo $a = |a|e^{i\phi}$, lahko preslikavo f zapišemo kot kompozicijo:

- (1) Središčnega raztega s središčem v 0 za faktor $|a|$,
- (2) Rotacije okoli 0 za kot ϕ ,
- (3) Translacije za vektor b .

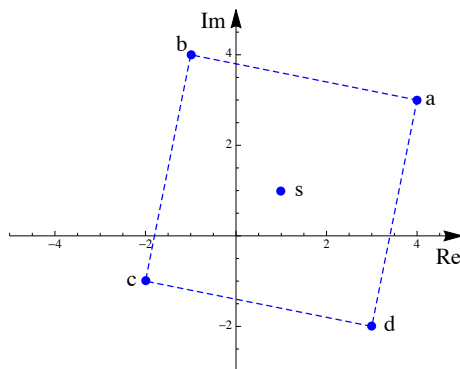
Rotacijo okoli točke s za kot ϕ pa lahko zapišemo s predpisom

$$f(z) = s + e^{i\phi}(z - s).$$

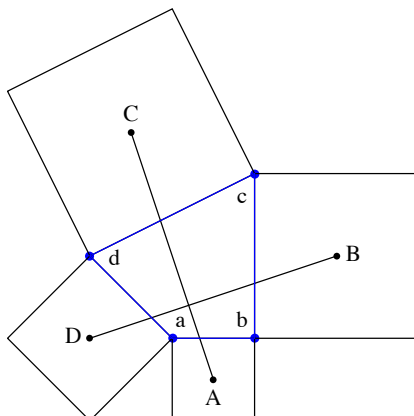
V našem primeru imamo kvadrat s središčem v točki $s = 1 + i$ in ogliščem $a = 4 + 3i$. Oglišča b, c in d dobimo tako, da vektor $a - s = 3 + 2i$ zavrtimo okoli središča s za kote $90^\circ, 180^\circ$ in 270° . Tako dobimo:

$$\begin{aligned}b &= s + e^{\frac{i\pi}{2}}(s - a) = 1 + i + i(3 + 2i) = -1 + 4i, \\ c &= s + e^{i\pi}(s - a) = 1 + i - (3 + 2i) = -2 - i, \\ d &= s + e^{\frac{3i\pi}{2}}(s - a) = 1 + i - i(3 + 2i) = 3 - 2i.\end{aligned}$$

Poglejmo še skico dobljenega kvadrata.



(b) Označimo oglišča štirikotnika z a, b, c in d . Nadalje naj bodo A, B, C in D središča kvadratov, ki jih dobimo nad stranicami štirikotnika.



Točko A dobimo tako, da točko b zavrtimo za kot $\phi = -\frac{\pi}{4}$ in hkrati še skrčimo za faktor $\frac{\sqrt{2}}{2}$ okoli točke a . Tako dobimo

$$A = a + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}(b - a) = a + \frac{1}{2}(1 - i)(b - a) = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{i}{2}(a - b).$$

Analogno lahko izračunamo še:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2}(b + c) + \frac{i}{2}(b - c), \\ C &= \frac{1}{2}(c + d) + \frac{i}{2}(c - d), \\ D &= \frac{1}{2}(d + a) + \frac{i}{2}(d - a). \end{aligned}$$

Daljici AC in BD lahko potem izrazimo s kompleksnima številoma:

$$\begin{aligned} AC &= \frac{1}{2}(c + d - a - b) + \frac{i}{2}(c + b - a - d), \\ BD &= \frac{1}{2}(a + d - b - c) + \frac{i}{2}(c + d - a - b). \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$BD = iAC,$$

kar pa pomeni, da dobimo daljico BC z vrtenjem daljice AC za 90° . Torej sta daljici pravokotni in enako dolgi. $\square$

(11) Izpeljži adicijska izreka za $\cos n\phi$ in $\sin n\phi$ za $n = 3$ in $n = 4$.

Rešitev: Poglejmo si za začetek adicijska izreka za $\cos 3\phi$ in $\sin 3\phi$. Iz de Moivreove formule sledi

$$(\cos \phi + i \sin \phi)^3 = \cos 3\phi + i \sin 3\phi.$$

Če z uporabo binomske formule razvijemo levo stran, dobimo:

$$\begin{aligned} (\cos \phi + i \sin \phi)^3 &= \cos^3 \phi + 3i \cos^2 \phi \sin \phi - 3 \cos \phi \sin^2 \phi - i \sin^3 \phi, \\ &= \cos^3 \phi + 3i(1 - \sin^2 \phi) \sin \phi - 3 \cos \phi(1 - \cos^2 \phi) - i \sin^3 \phi, \\ &= \cos^3 \phi - 3 \cos \phi \sin^2 \phi + i(3 \cos^2 \phi \sin \phi - \sin^3 \phi). \end{aligned}$$

Primerjava realnih in imaginarnih komponent v de Moivrovi formuli nam pove, da velja:

$$\begin{aligned}\cos 3\phi &= \cos^3 \phi - 3 \cos \phi \sin^2 \phi, \\ \sin 3\phi &= 3 \cos^2 \phi \sin \phi - \sin^3 \phi.\end{aligned}$$

Na podoben način dobimo:

$$\begin{aligned}\cos 4\phi &= \cos^4 \phi - 6 \cos^2 \phi \sin^2 \phi + \sin^4 \phi, \\ \sin 4\phi &= 4 \cos^3 \phi \sin \phi - 4 \cos \phi \sin^3 \phi.\end{aligned}$$

V primeru poljubnega naravnega števila n pa velja

$$(\cos \phi + i \sin \phi)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \cos^{n-k} \phi \sin^k \phi$$

Izraz v vsoti bo realen, če je k sodo število in imaginaren, če je k liho število. Torej velja:

$$\begin{aligned}\cos n\phi &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ sod}}}^n (-1)^{\frac{k}{2}} \binom{n}{k} \cos^{n-k} \phi \sin^k \phi, \\ \sin n\phi &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ lih}}}^n (-1)^{\frac{k-1}{2}} \binom{n}{k} \cos^{n-k} \phi \sin^k \phi.\end{aligned}$$

□

(12) Za poljuben $\phi \in (0, 2\pi)$ in poljuben $n \in \mathbb{N}$ izračunaj vsoti:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \cos k\phi &= 1 + \cos \phi + \cos 2\phi + \dots + \cos n\phi, \\ \sum_{k=0}^n \sin k\phi &= \sin \phi + \sin 2\phi + \dots + \sin n\phi.\end{aligned}$$

Rešitev: Pri izračunu danih vsot si bomo na zvit način pomagali z de Moivrovo formulo. Definirajmo:

$$\begin{aligned}x &= \sum_{k=0}^n \cos k\phi, \\ y &= \sum_{k=0}^n \sin k\phi.\end{aligned}$$

Potem velja

$$x + iy = \sum_{k=0}^n (\cos k\phi + i \sin k\phi) = \sum_{k=0}^n e^{ik\phi} = \sum_{k=0}^n (e^{i\phi})^k.$$

Ker je $\phi \in (0, 2\pi)$, je $e^{i\phi} \neq 1$. Torej imamo opravka z vsoto geometrijskega zaporedja z začetnim členom 1 in s količnikom $e^{i\phi}$. Po znani formuli je ta vsota enaka

$$\sum_{k=0}^n (e^{i\phi})^k = \frac{e^{i(n+1)\phi} - 1}{e^{i\phi} - 1}.$$

Prvotni vsoti bomo dobili tako, da bomo izračunali realno in imaginarno komponento kompleksnega števila na desni. Iz enakosti

$$\frac{e^{i(n+1)\phi} - 1}{e^{i\phi} - 1} = \frac{(e^{i(n+1)\phi} - 1)(e^{-i\phi} - 1)}{(e^{i\phi} - 1)(e^{-i\phi} - 1)} = \frac{-e^{i(n+1)\phi} + e^{in\phi} - e^{-i\phi} + 1}{2 - e^{i\phi} - e^{-i\phi}}$$

dobimo:

$$x = \frac{-\cos(n+1)\phi + \cos n\phi - \cos \phi + 1}{2 - 2\cos \phi},$$

$$y = \frac{-\sin(n+1)\phi + \sin n\phi + \sin \phi}{2 - 2\cos \phi}.$$

Ta dva izraza lahko še malo poenostavimo z uporabo trigonometričnih identitet:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right),$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

in pa enakostjo

$$2 - 2\cos \phi = 4 \sin^2 \frac{\phi}{2}.$$

Sledi

$$x = \frac{1}{2} + \frac{-\cos(n+1)\phi + \cos n\phi}{4 \sin^2 \frac{\phi}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\phi}{2 \sin \frac{\phi}{2}}$$

in

$$y = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\phi}{2} + \frac{-\sin(n+1)\phi + \sin n\phi}{4 \sin^2 \frac{\phi}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\phi}{2} - \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\phi}{2 \sin \frac{\phi}{2}}.$$

Tako smo izpeljali enakosti:

$$1 + \cos \phi + \cos 2\phi + \dots + \cos n\phi = \frac{1}{2} + \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\phi}{2 \sin \frac{\phi}{2}},$$

$$\sin \phi + \sin 2\phi + \dots + \sin n\phi = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\phi}{2} - \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\phi}{2 \sin \frac{\phi}{2}},$$

ki jima rečemo Lagrangeevi trigonometrični identiteti. □

V preostanku tega poglavja se bomo ukvarjali z močjo množic. Za množici A in B rečemo, da sta enako močni oziroma ekvipolentni (oznaka $|A| = |B|$), če obstaja bijekcija med njima. Pri predmetu Analiza 1 nas bodo zanimale predvsem:

- končne množice (te so ekvipolentne množici $\{1, 2, \dots, n\}$ za nek $n \in \mathbb{N}$),
- števno neskončne množice (te so ekvipolentne množici naravnih števil $\mathbb{N}$),
- množice z močjo kontinuum (te so ekvipolentne množici realnih števil $\mathbb{R}$).

(13) Poišči bijekcije:

- (a) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$,
- (b) $f : \mathbb{N} \rightarrow (7\mathbb{N}_0 + 2) \cup (7\mathbb{N}_0 + 4)$,
- (c) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Rešitev: Množica A je števno neskončna, če obstaja bijekcija $f : \mathbb{N} \rightarrow A$. To pomeni, da lahko elemente množice A razvrstimo v zaporedje, če definiramo $a_n := f(n)$. Od tod dobimo razpored

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

Če torej želimo pokazati, da je množica števno neskončna, najprej poskusimo elemente množice razvrstiti v zaporedje, formalno pa nato iz tega razporeda razberemo predpis za iskano bijekcijo.

(a) Množico nenegativnih celih števil $\mathbb{N}_0$ lahko razvrstimo v naslednje zaporedje

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{array}$$

Od tod lahko preberemo, da sta iskani bijekciji $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$ in $f^{-1} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ dani s predpisoma:

$$\begin{aligned} f(n) &= n - 1, & n \in \mathbb{N}, \\ f^{-1}(k) &= k + 1, & k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

(b) Sedaj iščemo bijekcijo med množico naravnih števil in množico

$$(7\mathbb{N}_0 + 2) \cup (7\mathbb{N}_0 + 4) = \{2, 9, 16, 23, \dots\} \cup \{4, 11, 18, 25, \dots\}$$

Za izračun eksplcitne bijekcije lahko na primer elemente zgornje množice razporedimo v naslednje zaporedje

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ 2 & 4 & 9 & 11 & 16 & 18 & \dots \end{array}$$

Ustrezni bijekciji $f : \mathbb{N} \rightarrow (7\mathbb{N}_0 + 2) \cup (7\mathbb{N}_0 + 4)$ in $f^{-1} : (7\mathbb{N}_0 + 2) \cup (7\mathbb{N}_0 + 4) \rightarrow \mathbb{N}$ sta dani s predpisoma:

$$\begin{aligned} f(n) &= \begin{cases} \frac{7n-3}{2} & ; n \text{ lih}, \\ \frac{7n-6}{2} & ; n \text{ sod}, \end{cases} \\ f^{-1}(k) &= \begin{cases} \frac{2k+3}{7} & ; k = 7l + 2, \\ \frac{2k+6}{7} & ; k = 7l + 4. \end{cases} \end{aligned}$$

(c) Ustrezno bijekcijo bomo sedaj konstruirali tako, da bomo elemente množice $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ razvrstili v zaporedje po diagonalah, na katerih je vsota koordinat konstantna. Poglejmo si nekaj prvih členov.

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{ \underbrace{(1, 1)}_{\text{vsota}=2}, \underbrace{(2, 1), (1, 2)}_{\text{vsota}=3}, \underbrace{(3, 1), (2, 2), (1, 3)}_{\text{vsota}=4}, \underbrace{(4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4)}_{\text{vsota}=5}, \dots \}$$

Točka (m, n) je glede na ta dogovor n -ta točka v $(m+n-1)$ -vi diagonalni. Od tod dobimo predpis za iskano bijekcijo

$$f(m, n) = 1+2+3+\dots+(m+n-2)+n = \frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2} + n = \binom{m+n-1}{2} + n.$$

Inverz preslikave f je v tem primeru dokaj težko eksplcitno izračunati. Izkaže pa se, da lahko njen inverz opišemo na naslednji način. Za $k \in \mathbb{N}$ označimo

$$p = \left\lceil \frac{-1 + \sqrt{1 + 8k}}{2} \right\rceil - 1.$$

Potem ima inverz preslikave f predpis

$$f^{-1}(k) = \left(p + 2 - k + \binom{p+1}{2}, k - \binom{p+1}{2} \right).$$

□

(14) Poišči bijekcije:

(a) $f : (0, 1) \rightarrow (a, b)$,

(b) $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$,

(c) $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo pokazali, da so vsi odprti intervali enako močni.

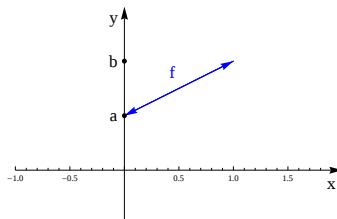
(a) Za bijekcijo $f : (0, 1) \rightarrow (a, b)$ lahko vzamemo kar linearno funkcijo, za katero velja $f(0) = a$ in $f(1) = b$. Ta funkcija ima predpis

$$f(x) = (b - a)x + a,$$

njen inverz pa je

$$f^{-1}(y) = \frac{y - a}{b - a}.$$

Poglejmo še graf funkcije f .

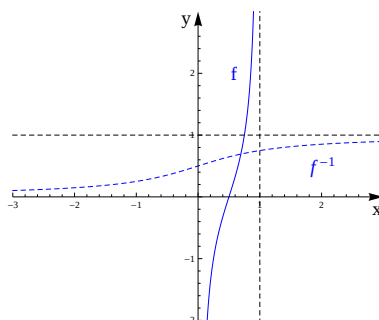


(b) V tem primeru iščemo bijekcijo med odprtim intervalom $(0, 1)$ in pa množico realnih števil $\mathbb{R}$. Lahko bi našli racionalno funkcijo, ki bi imela pola v robnih točkah intervala $(0, 1)$, lahko pa vzamemo tudi funkcijo $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \operatorname{tg} \left(\pi x - \frac{\pi}{2} \right)$$

Preslikava f je potem bijekcija z inverzom

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arc\,tg} x + \frac{\pi}{2} \right).$$

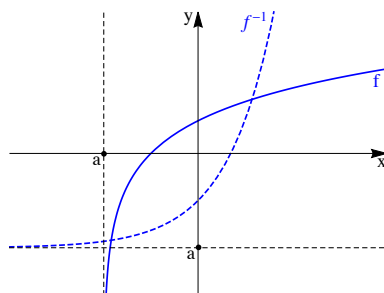


(c) Sedaj iščemo bijekcijo med polneskončnim intervalom (a, ∞) in množico realnih števil. Ustrezna je na primer ustrezno premaknjena logaritemska funkcija

$$f(x) = \ln(x - a)$$

z inverzom

$$f^{-1}(x) = e^x + a.$$



□

(15) Poišči bijekcijo $f : [0, 1) \rightarrow (0, 1)$.

Rešitev: V tem primeru ne bomo mogli najti zvezne bijekcije $f : [0, 1) \rightarrow (0, 1)$, ker takšne preslikave sploh ni. Zato se bomo morali malo bolj potruditi.

Najprej označimo z $A \subset [0, 1)$ in $A' \subset (0, 1)$ podmnožici:

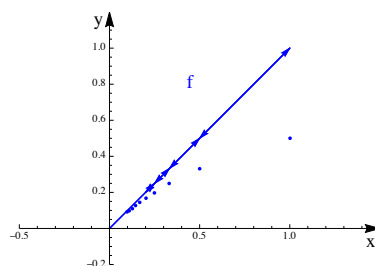
$$A = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\},$$

$$A' = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}.$$

Po eni strani sta množici A in A' ekvipotentni (eksplicitna bijekcija je $F : A \rightarrow A'$ s predpisom $F(0) = \frac{1}{2}$ ter $F(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$ za $n \geq 2$), po drugi strani pa je $[0, 1) \setminus A = (0, 1) \setminus A'$. Bijekcijo $f : [0, 1) \rightarrow (0, 1)$ bomo konstruirali tako, da bomo točke izven A pustili pri miru, točke v A pa preslikali s funkcijo F :

$$f(x) = \begin{cases} x & ; x \notin A, \\ F(x) & ; x \in A. \end{cases}$$

Tako definirana funkcija je bijekcija.



Opomba: Na podoben način lahko pokažemo, da so množice $[0, 1]$, $(0, 1)$, $[0, 1)$ in $(0, 1]$ vse paroma enako močne. □

(16) Dokaži, da imata množici $\mathbb{R}$ in $[0, 1] \cup \mathbb{N}$ isto moč.

Rešitev: S podobno idejo kot pri prejšnji nalogi bi lahko tudi tokrat konstruirali bijekcijo med danima množicama. Dostikrat pa je ekvipolentnost dveh množic lažje dokazovati z uporabo Cantor-Bernstein-Schroederjevega izreka.

Za množico X rečemo, da ima moč manjšo ali enako kot množica Y (to označimo z $|X| \leq |Y|$), če obstaja injektivna preslikava $f : X \rightarrow Y$.

Izrek (Cantor-Bernstein-Schroeder). *Naj za množici X in Y velja $|X| \leq |Y|$ in $|Y| \leq |X|$. Potem sta množici X in Y enako močni.*

Ta izrek bomo podrobneje spoznali pri predmetu Logika in množice. V praksi je uporaben, ker je pogosto lažje definirati dve injektivni preslikavi kot pa eno bijektivno.

Če želimo torej pokazati, da sta množici $\mathbb{R}$ in $[0, 1] \cup \mathbb{N}$ enako močni, moramo konstruirati injektivni preslikavi:

$$\begin{aligned} i &: [0, 1] \cup \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \\ j &: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \cup \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ker je $[0, 1] \cup \mathbb{N}$ podmnožica $\mathbb{R}$, je avtomatično $|[0, 1] \cup \mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$, saj lahko za i izberemo kar zožitev identitete s predpisom

$$i(x) = x.$$

Za konstrukcijo preslikave j pa se spomnimo, da imamo bijekcijo med $\mathbb{R}$ in $(0, 1)$. Ker je $(0, 1)$ podmnožica $[0, 1] \cup \mathbb{N}$, smo tako našli iskano preslikavo. Ekspliciten predpis pa je

$$j(x) = \frac{1}{\pi} \left(\arctan x + \frac{\pi}{2} \right).$$

□

(17) Dokaži, da imata množici $[0, 1) \times [0, 1)$ in $[0, 1)$ isto moč.

Rešitev: Preprosto lahko konstruiramo injektivno preslikavo $i : [0, 1) \rightarrow [0, 1) \times [0, 1)$ s predpisom

$$i(x) = (x, x),$$

bolj komplicirana pa je konstrukcija injektivne preslikave $j : [0, 1) \times [0, 1) \rightarrow [0, 1)$.

Vsako realno število $x \in [0, 1)$ lahko enolično zapišemo v obliki

$$0.x_1x_2x_3\dots,$$

kjer se cifra 9 ne ponavlja od nekod dalje. To pomeni, da npr. število 0.123 zapišemo v decimalni obliki 0.123000... in ne v obliki 0.122999....

Injektivno preslikavo $j : [0, 1) \times [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ lahko sedaj konstruiramo s predpisom

$$j(0.a_1a_2a_3\dots, 0.b_1b_2b_3\dots) = 0.a_1b_1a_2b_2a_3\dots$$

Zaradi enoličnosti decimalnega zapisa je ta preslikava injektivna, ni pa surjektivna, saj npr. število 0.2929292929... ne leži v sliki.

Opomba: Lahko bi konstruirali tudi bijekcijo $f : [0, 1) \times [0, 1) \rightarrow [0, 1)$. Ideja je v tem, da realno število $a \in [0, 1)$ ne razdelimo na decimalke pač pa na bloke oblike $99\dots 9k$, kjer

je $k \neq 9$, ter z a_i označimo i -ti blok. Za $a = 0.929941$ je npr. $a_1 = 92$, $a_2 = 994$, $a_3 = 1$ ter $a_i = 0$ za $i \geq 4$. Sedaj definiramo $f : [0, 1) \times [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ s predpisom

$$f(0.a_1a_2a_3\dots, 0.b_1b_2b_3\dots) = 0.a_1b_1a_2b_2a_3\dots$$

Potem je f bijekcija z inverzom $f^{-1}(0.c_1c_2c_3\dots) = (0.c_1c_3c_5\dots, 0.c_2c_4c_6\dots)$. □

(18) Določi moč naslednjih množic:

- (a) $A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mid x_j \in \{0, 1\} \text{ za vse } j \in \mathbb{N}\}$,
- (b) $B = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in A \mid x_j \leq x_{j+1} \text{ za vse } j \in \mathbb{N}\}$.

Rešitev: (a) Množica A sestoji iz vseh neskončnih zaporedij ničel in enic. Takšna zaporedja nas spominjajo na binarni decimalni zapis realnih števil, zato poskusimo dokazati, da ima množica A moč kontinuuma. Konstruirali bomo injektivni preslikavi:

$$\begin{aligned} f &: A \rightarrow [0, 1), \\ g &: [0, 1) \rightarrow A \end{aligned}$$

nato pa uporabili Cantor-Bernstein-Schroederjev izrek.

Preslikavo f bomo definirali tako, da bomo zaporedju priredili decimalno število, ki ima člene zaporedja za cifre. Eksplicitno je torej

$$f((x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)) = 0.x_1x_2x_3\dots$$

Če bi izbrali na desni strani binarni zapis, bi imeli probleme, saj na primer zapisa:

$$\begin{aligned} &0.10000000000\dots, \\ &0.01111111111\dots \end{aligned}$$

določata isto realno število. Da se izognemo takšnim komplikacijam, na desni raje izberimo decimalni zapis. Potem je tako definirana preslikava injektivna.

Za definicijo preslikave $g : [0, 1) \rightarrow A$ pa se spomnimo, da lahko vsako realno število $x \in [0, 1)$ zapišemo v binarni obliki

$$x = 0.x_1x_2x_3\dots,$$

kjer so $x_j \in \{0, 1\}$ za vsak $j \in \mathbb{N}$. Takšen zapis je enoličen, če zahtevamo, da se enice ne ponavljajo od nekod dalje. Preslikava g je potem definirana s predpisom

$$g(x) = (x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Preslikavi f in g skupaj nam povesta, da ima množica A moč kontinuuma.

(b) V množici B so samo tista zaporedja, ki imajo na začetku nekaj ničel, nato pa same enice. Takšna so na primer:

$$\begin{aligned} &0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, \\ &1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots, \\ &0, 1, 1, 1, 1, 1, \dots, \\ &0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots \end{aligned}$$

Opazimo lahko, da je takšno zaporedje natanko določeno, če povemo, kdaj se pojavi prva enica. To nam da misliti, da je množica B števno neskončna.

EksPLICITNO lahko konstruiramo bijekcijo $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow B$ s predpisom

$$f(n) = \underbrace{\{0, 0, \dots, 0\}}_{n-1}, 1, 1, 1, \dots$$

za $n \geq 1$ in

$$f(0) = \{0, 0, 0, \dots\}.$$

□

- (19) Naj bo A neskončna množica odprtih, paroma disjunktnih intervalov v $\mathbb{R}$. Pokaži, da je A števno neskončna.

Rešitev: Recimo, da imamo množico intervalov

$$A = \{I_\alpha\},$$

ki so vsi paroma disjunktni. Nalogo bomo dokazali tako, da bomo konstruirali injektivno preslikavo

$$f : A \rightarrow \mathbb{Q}.$$

Od tod bo sledilo, da je $|A| \leq |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$. Preslikavo f lahko konstruiramo takole. Najprej se spomnimo, da vsak interval vsebuje vsaj eno racionalno število. Izberimo torej za vsak interval I_α neko racionalno število r_α in definirajmo

$$f(I_\alpha) = r_\alpha.$$

Ker so intervali I_α paroma disjunktni, so števila r_α paroma različna, kar pa pomeni, da je preslikava f injektivna. Torej ima množica A kvečjemu števno neskončno elementov. □

- (20) Pokaži, da je množica vseh končnih podmnožic množice $\mathbb{N}$ števno neskončna.

Rešitev: Označimo z A množico končnih podmnožic množice $\mathbb{N}$. Definirali bomo injektivno preslikavo $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ s predpisom

$$f(\{a_1, a_2, \dots, a_k\}) = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_k}.$$

To je preslikava, ki priredi množici $B = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ naravno število, ki ima v dvojiškem zapisu enice natanko na mestih elementov množice B . Tako je na primer:

$$\begin{aligned} f(\emptyset) &= 0, \\ f(\{1\}) &= 2, \\ f(\{1, 2\}) &= 6, \\ f(\{1, 3, 4\}) &= 26. \end{aligned}$$

Vidimo, da dobimo v sliki preslikave f ravno vsa soda nenegativna števila. Če števila v sliki delimo z 2 in jim prištejemo 1, pa dobimo bijekcijo $F : A \rightarrow \mathbb{N}$ s predpisom

$$F(\{a_1, a_2, \dots, a_k\}) = 2^{a_1-1} + 2^{a_2-1} + \dots + 2^{a_k-1} + 1$$

□