

ANALIZA 1
4. domača naloga

(1) Poenostavi naslednje izraze:

(a) $(3 + 4i)\overline{(1 - 3i)}$ (b) $\frac{7 - 3i}{1 + i}$ (c) $(1 + i\sqrt{3})^{10}$

(a) $-9 + 13i$ (b) $2 - 5i$ (c) $-512(1 + i\sqrt{3})$

(2) Zapiši vse vrednosti izraza $\sqrt[7]{(-\sqrt{3} - i)^5}$ in jih nariši.

$\sqrt[7]{32} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} + \frac{2k\pi}{7} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} + \frac{2k\pi}{7} \right) \right), k = 0, 1, \dots, 6$

(3) Skiciraj naslednje podmnožice kompleksnih števil.

(a) $\{z \in \mathbb{C}; 2(\operatorname{Re} z)^2 + \operatorname{Im} z < 1\}$ (b) $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z^2 + 4\operatorname{Im} z = 0\}$

(a) točke, ki ležijo pod parabolo $y = 1 - 2x^2$
(b) hiperbola $(y - 2)^2 - x^2 = 4$

(4) Naj bo $k \neq 0$ realno število. Za katere k je $1 + ik$ bližje izhodišču kot $1 - \frac{i}{k}$?

$|k| < 1$

(5) Pokaži, da je množica kompleksnih števil $\left\{ z = \frac{3}{2 + \cos \varphi + i \sin \varphi}; \varphi \in \mathbb{R} \right\}$ podmnožica krožnice s središčem $a = 2$ in polmerom 1.

(6) Izračunaj množice kompleksnih števil z , ki zadoščajo (ne)enačbam. Množice rešitev nariši.

(a) $z^3 = -2 + 2i$ (b) $z^8 + z^4 - 12 = 0$ (c) $\sqrt{|z|^2 - 2} + \operatorname{Im} z > \operatorname{Re} z$

(a) $z = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right), k = 0, 1, 2$
(b) $z = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4} \right) \right), k = 0, 1, 2, 3$, oziroma $z = \pm 1 \pm i$,
 $z = \sqrt[4]{3} \left(\cos \left(\frac{2k\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{2k\pi}{4} \right) \right), k = 0, 1, 2, 3$, oziroma $z = \pm \sqrt[4]{3}, \pm i \sqrt[4]{3}$
(c) $\{z = x + iy; x < y, x^2 + y^2 \geq 2 \text{ ali } y \leq x, 1 < xy\}$

(7) Pokaži, da sta množici kompleksnih števil A in B enaki.

$A = \left\{ z \in \mathbb{C} - \{0\}; \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} \leq 2 \right\} \quad B = \left\{ z \in \mathbb{C} - \{0\}; \left| z - \frac{1}{2} \right| \geq \frac{1}{2} \right\}.$

(8) Zapiši $x^5 - 1$ kot produkt realnih polinomov stopnje največ dve.

(9) Z uporabo Moivreove formule izrazi $\cos 4\varphi$ in $\sin 4\varphi$ s pomočjo $\cos \varphi$ in $\sin \varphi$.

(10) Naj bo $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Poišči vse rešitve enačbe

$$z^7 + z^5 a + z^3 a^2 + z a^3 = 0$$

v polarni obliki.

$z = 0, z = \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{4} \right) \right), k = 1, 2, 3, 5, 6, 7$

(11) Poišči vsa kompleksna števila z , ki izpolnjujejo enačbi

$$\begin{aligned} |z|^2 + (2 + i)z + (2 - i)\bar{z} + 4 &= 0, \\ (1 - i)z + (1 + i)\bar{z} + 4 &= 0. \end{aligned}$$

$z = -2, z = -3 + i$

(12) Poišči vsa kompleksna števila z , ki ustrezajo pogojema

$$z^2 + \bar{z} + 1 = 0, \quad \operatorname{Im}(z^2) \geq 1.$$

$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i$

(13)* Čim bolj natančno nariši množico točk v kompleksni ravnini, ki jo določa sistem neenačb:

$$4|\operatorname{Re}(z-1)| > |\operatorname{Im} z|, \quad \operatorname{Re}(z^2) > \operatorname{Im}(z^2).$$

(14) Naj bodo z, w in t kompleksna števila. Pokaži, da velja

$$z\operatorname{Im}(\bar{w}t) + w\operatorname{Im}(\bar{t}z) + t\operatorname{Im}(\bar{z}w) = 0.$$

(Nasvet: $\operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.)

(15) Naj bo $z = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$. Označimo $a = z + z^4$ in $b = z^2 + z^3$. Pokaži:

(a) $a + b = -1$ in $ab = -1$.

(b) z je rešitev enačbe $w^{16} + w^9 + w^4 + w + 1 = \sqrt{5}$.

(16) Poišči vsa kompleksna števila z in w , ki zadoščajo enačbam

$$z + w = 3 + 4i, \quad |z| = 2, \quad |w| = 3.$$

(Nasvet: Trikotniška neenakost.)

$$\boxed{z = \frac{2}{5}(3 + 4i), \quad w = \frac{3}{5}(3 + 4i)}$$

(17)* Naj bosta z, w neničelni kompleksni števili, za kateri je $\frac{(z+w)^2}{zw}$ realno število. Pokaži, da točke 0 , z in w ležijo na isti premici ali pa so oglišča enakokrakega trikotnika.

(18)* Naj bo $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Pokaži, da je $(1 + \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n})^n$ imaginarno število.

(Nasvet: Izračunaj argument.)

(19) Poišči vsa kompleksna števila z , za katera je $\left(\frac{z-i-1}{iz+1}\right)^2$ realno število.

$$\boxed{\{z = x + iy; (x - \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}, x \neq 0\} \cup \{z = x + i; x \neq 0\}}$$

(20) Naj bosta z, w kompleksni števili. Pokaži:

(a) Če je $|z| = 1$ in $|w| \neq 1$, potem je $\left|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = 1$.

(b) Paralelogramska enakost: $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.

(c) $|1 - \bar{z}w|^2 - |z - w|^2 = (1 + |zw|)^2 - (|z| + |w|)^2$.

(d) Če velja $\operatorname{Re} z, \operatorname{Re} w > 0$, potem je $\left|\frac{z-w}{\bar{z}+w}\right| < 1$.