

Zaporedje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je podano z rekurzivno zvezo

$$a_n = c_{n-1}a_{n-1} + \dots + c_d a_d,$$

kjer so $c_d, c_{d+1}, \dots, c_{n-1}$ realne konstante. Želimo izračunati splošni člen zaporedja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Zgornji rekurzivni zvezi priredimo polinom

$$p(t) = t^n - c_{n-1}t^{n-1} - c_{n-2}t^{n-2} - \dots - c_d t^d.$$

Naj bodo $x_1, \dots, x_k$ vse paroma različne neničelne ničle polinoma p .

Nastavek za izračun splošnega člena je odvisen od večkratnosti neničelnih ničel $x_1, \dots, x_k$. Naj bo λ_j kratnost neničelne ničle x_j polinoma p . Del nastavka, ki pripada ničli x_j je

$$T_j(n) := A_1(j)x_j^n + A_2(j)n \cdot x_j^n + \dots + A_{\lambda_j}(j)n^{\lambda_j-1}x_j^n,$$

kjer so $A_1(j), \dots, A_{\lambda_j}(j)$ neznane konstante. Nastavek za a_n iščemo v obliki $T_1(n) + \dots + T_k(n)$. Opazimo, da imamo veliko neznanih konstant, katere moramo določiti. Da jih določimo, potrebujemo precej začetnih pogojev. Skratka, potrebujemo natanko $n - d$ začetnih pogojev.

Oglejmo si nekaj primerov.

Primer: Zaporedje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je podano z rekurzivno zvezo $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ za $n \geq 3$ in začetnima členoma $a_1 = 1$ in $a_2 = 2$. Določimo splošni člen zaporedja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Polinomska enačba $t^n = 3t^{n-1} - 2t^{n-2}$ ima dve enkratni neničelni ničli $x_1 = 1$ in $x_2 = 2$. To sledi iz $t^{n-2}(t^2 - 3t + 2) = t^{n-2}(t-1)(t-2) = 0$. Nastavek za splošni člen zaporedja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je torej

$$x_n = A \cdot 1^n + B \cdot 2^n.$$

Z upoštevanjem $a_1 = 1$ in $a_2 = 2$, dobimo $A = 0$ in $B = \frac{1}{2}$. Odtod sledi $a_n = 2^{n-1}$.

Primer: Če so različne neničelne ničle prirejenega polinoma enake 2, 5, 7 in vse imajo večkratnost 1, potem je nastavek za splošni člen enak

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 5^n + C \cdot 7^n.$$

Tukaj potrebujemo prve tri člene zaporedja, da izračunamo A, B in C .

Primer: Zaporedje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ za $n \geq 4$ je podano z rekurzivno zvezo

$$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$$

in začetnimi členi $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ in $a_3 = 1$. Ker ima polinom $t^n - 3t^{n-1} + 3t^{n-2} - 1$ eno samo vendar trojno neničelno ničlo 1, nastavek za a_n iščemo v obliki

$$a_n = A \cdot 1^n + B \cdot n \cdot 1^n + C \cdot n^2 \cdot 1^n.$$

Iz začetnih pogojev dobimo $A = -2$, $B = \frac{5}{2}$ in $C = -\frac{1}{2}$. Splošni člen je enak

$$a_n = -2 + \frac{5}{2}n - \frac{1}{2}n^2.$$

Primer: Recimo, da ima prirejeni polinom za različne neničelne ničle natančno števila 2, 4 in 5. Recimo, da je 2 enkratna ničla, 4 je štirikratna ničla in 5 je trikratna ničla. Splošni člen iščemo v obliki nastavka:

$$a_n = A \cdot 2^n + (B \cdot 4^n + C \cdot n \cdot 4^n + D \cdot n^2 \cdot 4^n + E \cdot n^3 \cdot 4^n) + (F \cdot 5^n + G \cdot n \cdot 5^n + H \cdot n^2 \cdot 5^n).$$

Da izračunamo neznane konstante A, B, C, D, E, F, G in H moramo imeti podanih 8 členov zaporedja.