

Analiza 1

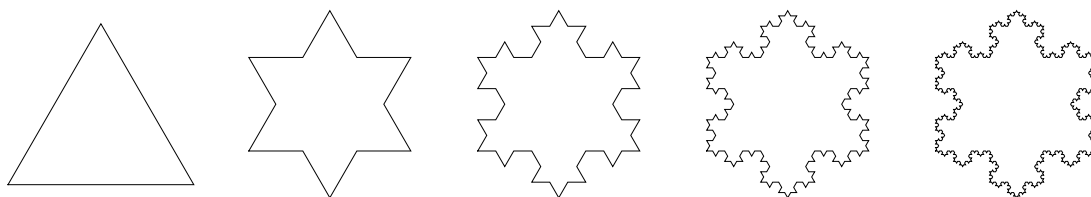
Vrste

(1) Izračunaj obseg in ploščino Kochove snežinke.

Rešitev: Kochova snežinka je ravninska množica, ki jo dobimo po naslednjem postopku:

- začnemo z enakostraničnim trikotnikom,
- v vsakem koraku na srednjo tretjino vsake stranice dodamo enakostranični trikotnik.

Prvih nekaj iteracij tega postopka je narisanih na spodnji sliki.



Pokazali bomo, da v limiti dobimo lik z neskončnim obsegom in s končno ploščino.

Označimo z a_1 dolžino stranice prvotnega enakostraničnega trikotnika. Lik, ki ga dobimo v n -ti iteraciji, ima potem dolžino stranice enako $a_n = \frac{a_1}{3^{n-1}}$, vseh stranic pa je $3 \cdot 4^{n-1}$. Obseg tega lika je potem enak

$$o_n = 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{a_1}{3^{n-1}} = 3a_1 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}.$$

Dobimo geometrijsko zaporedje, ki narašča čez vse meje.

Poglejmo si še ploščino Kochove snežinke. Označimo z S_1 ploščino začetnega trikotnika. Trikotniki, ki jih dodamo v n -ti iteraciji, imajo potem ploščino enako $\frac{S_1}{9^{n-1}}$ in jih je $3 \cdot 4^{n-2}$. V n -tem koraku se torej ploščina poveča za $S_n = 3 \cdot 4^{n-2} \cdot \frac{S_1}{9^{n-1}}$, ploščina Kochove snežinke pa je enaka

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 + \frac{S_1}{3} \left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots\right) = S_1 + \frac{S_1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{8}{5} S_1.$$

Opomba: Za izračun vsote poljubne geometrijske vrste lahko uporabimo formulo

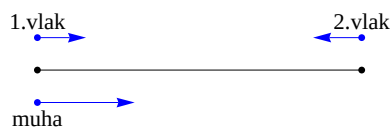
$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots = \frac{a}{1-q},$$

ki velja za vse $|q| < 1$.

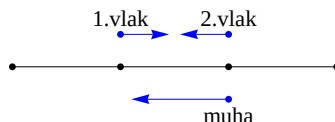
□

- (2) Vlaka, ki sta na začetni razdalji 100 km, se vozita eden proti drugemu vsak s hitrostjo 50 km/h. Med njima leti muha s hitrostjo 100 km/h, izmenično od enega do drugega. Kolikšno pot opravi muha med letom?

Rešitev: Recimo, da se muha in prvi vlak premikata proti desni, drugi vlak pa proti levi.



Najprej izračunajmo, kdaj muha prvič sreča drugi vlak. Na začetku sta muha in drugi vlak $s_1 = 100$ km narazen, približujeta pa se s hitrostjo $v = 150$ km/h. Od tod sledi, da se bosta srečala po $t_1 = \frac{s_1}{v} = \frac{2}{3}h$. Vsak izmed vlakov bo v tem času prevozil tretjino začetne razdalje, kar pomeni, da bosta v tem trenutku vlaka še za $s_2 = \frac{1}{3}s_1$ narazen.



Sedaj se muha obrne in leti nazaj proti prvemu vlaku. Muha in prvi vlak se približujeta s hitrostjo $v = 150$ km/h, kar pomeni, da se srečata po $t_2 = \frac{s_2}{v} = \frac{1}{3}t_1$ časa. V tem trenutku sta vlaka narazen še za $s_3 = \frac{1}{3}s_2 = \frac{1}{9}s_1$.

Enak sklep lahko sedaj induktivno ponavljamo. Po vsakem srečanju muhe z enim izmed vlakov se medsebojna oddaljenost med vlakoma zmanjša za faktor $\frac{1}{3}$, čas muhe v zraku pa se posledično prav tako zmanjša za faktor $\frac{1}{3}$. Skupen čas, ki ga muha prebije v zraku je torej

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + \dots = t_1 + \frac{1}{3}t_1 + \frac{1}{9}t_1 + \dots = \frac{t_1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}t_1 = 1h.$$

Ker muha ves čas leti s hitrostjo 100 km/h, v tem času opravi pot

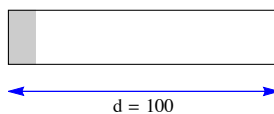
$$s = 100km.$$

Opomba: Do istega rezultata bi lahko brez uporabe geometrijske vrste prišli z naslednjim razmislekom. Ker se vlaka približujeta eden drugemu s hitrostjo 100 km/h, se srečata po 1 uri. Od tod potem takoj sledi, da muha v tem času opravi pot 100 km. $\square$

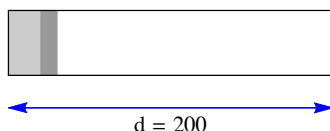
- (3) Mravljica se s hitrostjo 1 cm/s premika po elastični vrvi, ki je na začetku dolga 1 m, vsako sekundo pa se raztegne za dodaten meter. Ali mravljica kdaj doseže nasprotni konec vrvi? Kaj pa, če se dolžina vrvi vsako sekundo podvoji?

Rešitev: Privzeli bomo, da se vsako sekundo vrv najprej raztegne za en meter, mravljica pa se nato premakne za en centimeter. Vse količine bomo izrazili v centimetrih.

Po 1 sekundi je vrv torej dolga $d_1 = 100$, mravljica pa se je premaknila za $s_1 = 1$.



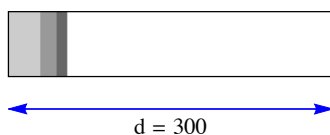
Po 2 sekundah je vrv dolga $d_2 = 200$, mravljica pa se premakne za dodaten centimeter.



Upoštevati pa moramo, da se je prehojena pot iz prvega koraka raztegnila na dva centimetra, kar pomeni, da je

$$s_2 = 2 + 1 = 2\left(1 + \frac{1}{2}\right).$$

Po treh sekundah, je vrv dolga $d_3 = 300$, mravljica pa se spet premakne za dodaten centimeter.



Pot iz prvega koraka se tokrat raztegne za faktor 3, pot iz drugega koraka pa za faktor $\frac{3}{2}$. Tako dobimo

$$s_3 = 3 + \frac{3}{2} + 1 = 3\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right).$$

Poglejmo sedaj, kaj se zgodi po n -sekundah. Vrv je takrat dolga $d_n = 100n$. Prehojene poti v prvih $n - 1$ sekundah pa se raztegnejo za faktorje $n, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \dots, \frac{n}{n-1}$. Tako dobimo

$$s_n = n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \dots + \frac{n}{n-1} + 1 = n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right).$$

Mravljica doseže desni rob vrvi, če za nek $n \in \mathbb{N}$ velja $s_n > d_n$ oziroma

$$n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) > 100n.$$

S predavanj vemo, da harmonična vrsta divergira, zato za dovolj velik n velja

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > 100,$$

kar pomeni, da je odgovor na vprašanje pritrdilen.

Če bi se dolžina vrvi vsako sekundo podvojila, pa mravljica desnega roba ne bi dosegla. V tem primeru bi lahko izračunali, da je $d_n = 2^{n-1} \cdot 100$ in

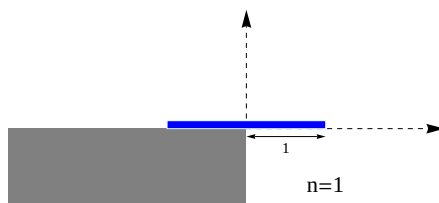
$$s_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 4 + 2 + 1 = 2^n - 1.$$

Torej za vsako naravno število n velja $2^n - 1 < 2^{n-1} \cdot 100$. □

- (4) Karte z enotsko maso in z dolžino 2 zlagamo eno nad drugo, tako da je vsaka karta malce desno od karte, ki je pod njo. Kako dolg most lahko teoretično zgradimo iz takšnega sistema kart?

Rešitev: Postavimo koordinatni sistem tako, da bo rob mize poravnan z navpično osjo. Izračunali bomo, kako dolg most lahko teoretično sestavimo iz n kart. Z $x_1, x_2, \dots, x_n$ bomo označili vodoravne koordinate središč posameznih kart.

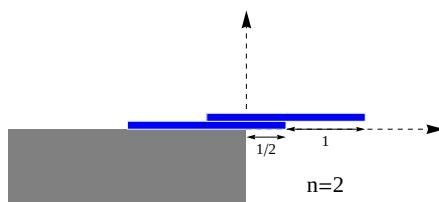
Recimo najprej, da imamo eno samo karto. Če hočemo, da bo most stabilen, mora biti središče karte levo od roba mize oziroma $x_1 \leq 0$. To pomeni, da lahko sestavimo most maksimalne dolžine $d = d_1 = 1$.



Recimo sedaj, da imamo dve karti. Če hočemo, da bo most stabilen, je lahko vrhnja karta za največ 1 desno od spodnje, hkrati pa težišče sistema obeh kart ne sme ležati desno od roba mize. Tako pridemo do sistema neenačb:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 1, \\ \frac{1}{2}(x_1 + x_2) &\leq 0. \end{aligned}$$

Most bo najdaljši, ko bosta veljala enakosti. Dobljeni sistem ima rešitev $x_1 = \frac{1}{2}$ in $x_2 = -\frac{1}{2}$. Spodnja karta torej gleda za $d_2 = x_2 + 1 = \frac{1}{2}$ čez rob mize, skupna dolžina mostu pa je $d = d_1 + d_2 = \frac{3}{2}$.



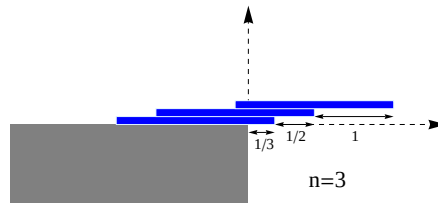
Podrobneje si pogledjmo še most iz treh kart. Privzeli bomo, da je relativna lega zgornjih dveh kart ista kot v prejšnjem primeru. Če hočemo, da bo most iz treh kart stabilen, mora biti težišče sistema zgornjih dveh kart levo od roba spodnje karte, hkrati pa mora biti težišče celotnega sistema levo od roba mize. Tako dobimo pogoja:

$$\begin{aligned} \bar{x}_2 - x_3 &\leq 1, \\ \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) &\leq 0, \end{aligned}$$

kjer smo z $\bar{x}_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ označili težišče sistema zgornjih dveh kart. Spodnjo neenačbo lahko zapišemo tudi v obliki

$$\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) = \frac{1}{3}(2\bar{x}_2 + x_3) = \frac{2}{3}\bar{x}_2 + \frac{1}{3}x_3 \leq 0.$$

Most maksimalne dolžine bomo dobili, ko bo $\bar{x}_2 = \frac{1}{3}$ in $x_3 = -\frac{2}{3}$. V tem primeru bo spodnja karta gledala za $d_3 = \frac{1}{3}$ čez rob mize, dolžina mostu pa bo $d = d_1 + d_2 + d_3 = \frac{11}{6}$.



Poglejmo si sedaj še most iz n kart. Induktivno bomo privzeli, da že poznamo stabilno konfiguracijo iz $n - 1$ kart. Dodatna pogoja bosta še, da je težišče zgornjih $n - 1$ kart levo od roba spodnje in da je težišče sistema vseh kart levo od roba mize. Tako dobimo sistem neenačb:

$$\begin{aligned}\bar{x}_{n-1} - x_n &\leq 1, \\ \frac{n-1}{n}\bar{x}_{n-1} + \frac{1}{n}x_n &\leq 0.\end{aligned}$$

Pridruženi sistem enačb ima rešitev $\bar{x}_{n-1} = \frac{1}{n}$ in $x_n = -\frac{n-1}{n}$. Spodnja karta leži za $d_n = \frac{1}{n}$ čez rob mize, dolžina mostu pa je

$$d = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Če bi imeli na voljo neskončno kart, bi dobili most enake dolžine, kot je vsota harmonične vrste. Ker harmonična vrsta divergira, bi teoretično torej lahko zgradili poljubno dolg most iz kart.

Opomba: Harmonična vrsta divergira zelo počasi, tako da je praktično skoraj nemogoče zgraditi že most, ki se razteza nekaj dolžin. S standardnim kompletom 52 igralnih kart bi teoretično lahko zgradili približno 20 cm dolg most. $\square$

(5) Z izračunom delnih vsot ugotovi, ali dani vrsti konvergirata:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)(n+k+1)}, k \geq 0,$
 (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n}).$

Rešitev: Številska vrsta je zaporedje števil (a_n) , ki ga zapišemo kot formalno vsoto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Za poljubno vrsto lahko definiramo zaporedje delnih vsot

$$s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

in rečemo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, če konvergira zaporedje njenih delnih vsot. Vsota vrste je definirana s predpisom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n).$$

(a) Ulomek $\frac{1}{(n+k)(n+k+1)}$ lahko poenostavimo na naslednji način. Izkaže se, da je

$$\frac{1}{(n+k)(n+k+1)} = \frac{A}{n+k} + \frac{B}{n+k+1}$$

za neki konstanti A in B (ulomkom na desni rečemo parcialni ulomki). Ti konstanti izračunamo tako, da damo desno stran na skupni imenovalc in primerjamo koeficiente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+k)(n+k+1)} &= \frac{A}{n+k} + \frac{B}{n+k+1}, \\ &= \frac{A(n+k+1) + B(n+k)}{(n+k)(n+k+1)}, \\ &= \frac{An + Ak + A + Bn + Bk}{(n+k)(n+k+1)}, \\ &= \frac{(A+B)n + (Ak + A + Bk)}{(n+k)(n+k+1)}. \end{aligned}$$

S primerjavo koeficientov polinomov v števcu pridemo do sistema dveh enačb za dve neznanki:

$$\begin{aligned} A + B &= 0, \\ Ak + B + Bk &= 1, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = 1$ in $B = -1$. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ torej velja enakost

$$\frac{1}{(n+k)(n+k+1)} = \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1}.$$

Torej je

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \left(\frac{1}{1+k} - \frac{1}{2+k}\right) + \left(\frac{1}{2+k} - \frac{1}{3+k}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1}\right) = \frac{1}{1+k} - \frac{1}{n+k+1}.$$

Sledi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)(n+k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) = \frac{1}{1+k}.$$

(b) Najprej opazimo, da je $a_n = \ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln(\frac{n+1}{n})$. To nam omogoča, da natančno izračunamo delne vsote

$$s_n = a_1 + \dots + a_n = \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1).$$

Zaporedje delnih vsot narašča čez vse meje, kar pomeni, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$ divergira. □

Vsoto vrste je praviloma težko natančno izračunati. Zato se moramo pogosto zadovoljiti s tem, da ugotovimo, ali dana vrsta sploh konvergira. Če vemo, da konvergira, lahko njeno vsoto aproksimiramo s končnimi vsotami.

Za testiranje vrst s pozitivnimi členi (oziroma absolutne konvergence v splošnem) imamo na razpolago naslednje kriterije:

- primerjalni kriterij,
- kvocientni kriterij,
- korenski kriterij,
- Raabejev kriterij,
- integralni kriterij (tega zaenkrat ne bomo obravnavali).

(6) Obravnavaj konvergenco vrst:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}},$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n},$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n}.$$

Rešitev: Pri tej nalogi bomo uporabili:

Primerjalni kriterij: Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vrsti s pozitivnimi členi in naj velja $a_n \leq b_n$ za vse n od nekega dalje. Potem velja:

- če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentna, je tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna,
- če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentna, je tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentna.

Tipično bomo vrste primerjali z:

- vrstami oblike $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ za $s > 0$,
- geometrijskimi vrstami oblike $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ za $q > 0$.

Pri tem bomo uporabili dejstvo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergira natanko tedaj, ko je $s > 1$, geometrijska vrsta pa natanko tedaj, ko je $q < 1$.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} :$$

Uporabimo oceno

$$\frac{1}{n\sqrt{n+1}} < \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n^3}}.$$

Torej je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Ker je $\frac{3}{2} > 1$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konvergira, zato po primerjalnem kriteriju sledi, da tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ konvergira.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n} :$

Sedaj lahko ocenimo

$$\frac{n+1}{n^2+3n} > \frac{n}{n^2+3n} = \frac{1}{n+3}.$$

Torej je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}.$$

Ker vrsta na desni divergira, je tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n}$ divergentna.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n} :$

Uporabili bomo neenakost $\sin x < x$, ki velja za vse $x > 0$. Sledi

$$2^n \sin \frac{1}{3^n} < \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Velja torej $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Geometrijska vrsta na desni konvergira, zato je tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n}$ konvergentna. □

(7) Obravnavaj konvergenco vrst:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, a > 0,$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}, a > 0, s \in \mathbb{R},$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(an)^n}, a > 0,$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}.$

Rešitev: Pri tej nalogi bomo uporabili:

Kvocienčni kriterij: Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in naj obstaja $D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
Potem velja:

- če je $D < 1$, je vrsta konvergentna,
- če je $D > 1$, je vrsta divergentna,
- če je $D = 1$, je vrsta ali konvergentna ali divergentna.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$:

V tem primeru je $a_n = \frac{a^n}{n!}$. Od tod sledi

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = 0.$$

Ker je $D < 1$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ konvergira za vsak $a > 0$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}$:

Sedaj je $a_n = \frac{a^n}{n^s}$. Torej je

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)^s}}{\frac{a^n}{n^s}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s} = a.$$

Z uporabo kvocienčnega kriterija tako dobimo:

- če je $a < 1$, vrsta konvergira za vsak s ,
- če je $a > 1$, vrsta divergira za vsak s .

V primeru, ko je $a = 1$, imamo opravka z vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Za to vrsto pa vemo, da konvergira natanko takrat, ko je $s > 1$.

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(an)^n} :$$

Tokrat imamo $a_n = \frac{n!}{(an)^n}$. Sledi

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(a(n+1))^{n+1}}}{\frac{n!}{(an)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!a^n n^n}{n!a^{n+1}(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a(1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{1}{ae}.$$

Velja torej naslednje:

- če je $a > \frac{1}{e}$, vrsta konvergira,
- če je $a < \frac{1}{e}$, vrsta divergira.

Posebej moramo obravnavati še primer, ko je $a = \frac{1}{e}$. Tedaj je

$$a_n = \frac{e^n n!}{n^n}.$$

Če primerjamo dva zaporedna člena, dobimo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}(n+1)!n^n}{e^n n! (n+1)^{n+1}} = \frac{e}{(1 + \frac{1}{n})^n}.$$

Za zaporedje $(1 + \frac{1}{n})^n$ vemo, da je naraščajoče in da ima limito e . Ker so vsi členi tega zaporedja strogo manjši od e , je

$$a_{n+1} > a_n,$$

kar pomeni, da členi vrste naraščajo. Vrsta torej divergira, saj je potreben pogoj za konvergenco vrste, da členi limitirajo proti nič.

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} :$$

Najprej opomnimo, da je dvojna fakulteta oznaka za naslednji števili:

$$\begin{aligned} (2n)!! &= 2n(2n-2)(2n-4) \cdots 4 \cdot 2, \\ (2n+1)!! &= (2n+1)(2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1. \end{aligned}$$

Namesto produkta vseh števil torej vzamemo samo vsako drugo število. Računajmo

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!(2n+3)}}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!!(2n)!!(2n+1)}{(2n+2)!!(2n-1)!!(2n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+1)}{(2n+2)(2n+3)} = 1.$$

Pri računanju limite smo uporabili naslednji enakosti:

$$\begin{aligned} \frac{(2n+1)!!}{(2n-1)!!} &= \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3) \cdots 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{(2n-1)(2n-3) \cdots 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} = 2n+1, \\ \frac{(2n)!!}{(2n+2)!!} &= \frac{2n(2n-2) \cdots 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n+2)2n(2n-2) \cdots 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{1}{2n+2}. \end{aligned}$$

Ker pride limita enaka $D = 1$, nam kvocientni kriterij nič ne pove o konvergenci vrste. V takšnih primerih nam včasih pomaga:

Raabejev kriterij: Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in naj obstaja

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right).$$

Potem velja:

- če je $R > 1$, je vrsta konvergentna,
- če je $R < 1$, je vrsta divergentna,
- če je $R = 1$, je vrsta ali konvergentna ali divergentna.

V našem primeru je

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)(2n+1)} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{4n^2 + 10n + 6 - (4n^2 + 4n + 1)}{4n^2 + 4n + 1} \right) = \frac{3}{2}.$$

Ker je $R = \frac{3}{2} > 1$, vrsta konvergira. □

(8) Obravnavaj konvergenco vrst:

- (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n},$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n} \right)^n, a > 0,$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n,$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} n a^n, a > 0.$

Rešitev: Tokrat imamo vrste, ki jih lahko obravnavamo z uporabo korenskega kriterija.

Korenski kriterij: Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in naj obstaja $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}.$

Potem velja:

- če je $C < 1$, je vrsta konvergentna,
- če je $C > 1$, je vrsta divergentna,
- če je $C = 1$, je vrsta ali konvergentna ali divergentna.

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n} :$$

Splošni člen je $a_n = \frac{1}{\ln^n n}$. Torej je

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0.$$

Ker je $C = 0 < 1$, vrsta $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$ konvergira.

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^n :$$

Tokrat je $a_n = \left(\frac{a}{n}\right)^n$. Sledi

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{a}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} = 0.$$

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^n$ torej konvergira za vsak $a > 0$.

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n :$$

Sedaj je $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$, od koder dobimo $C = 1$. To pomeni, da korenski kriterij nič ne pove o konvergenci vrste. Opazimo pa lahko, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e,$$

kar pomeni, da vrsta divergira.

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} na^n :$$

Imamo $a_n = na^n$. Torej je

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{na^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \sqrt[n]{n} = a.$$

Z uporabo korenskega kriterija tako dobimo:

- če je $a < 1$, vrsta konvergira,
- če je $a > 1$, vrsta divergira.

Če je $a = 1$, imamo vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} n$, ki pa divergira. □

(9) Naj bo (x_n) padajoče zaporedje pozitivnih realnih števil. Dokaži, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira natanko takrat, ko konvergira vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x_{2^k}$.

Rešitev: Opravka imamo z vrstama:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} x_n &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \dots, \\ \sum_{k=1}^{\infty} 2^k x_{2^k} &= 2x_2 + 4x_4 + 8x_8 + 16x_{16} + 32x_{32} + \dots\end{aligned}$$

Denimo najprej, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira. Ker je zaporedje (x_n) padajoče, imamo ocene:

$$\begin{aligned}2x_4 &\leq x_3 + x_4, \\ 4x_8 &\leq x_5 + x_6 + x_7 + x_8,\end{aligned}$$

oziroma v splošnem

$$2^{k-1}x_{2^k} \leq x_{2^{k-1}+1} + x_{2^{k-1}+2} + \dots + x_{2^k}.$$

Sedaj velja:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x_{2^k} &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} x_{2^k}, \\ &= 2(x_2 + 2x_4 + 4x_8 + 8x_{16} + 16x_{32} + \dots), \\ &\leq 2(x_2 + (x_3 + x_4) + (x_5 + x_6 + x_7 + x_8) + \dots), \\ &= 2 \sum_{n=2}^{\infty} x_n.\end{aligned}$$

Po primerjalnem kriteriju torej konvergira tudi vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x_{2^k}$.

V obratno smer je dokaz podoben. Denimo torej, da vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x_{2^k}$ konvergira. Da potem konvergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, sledi iz ocene

$$x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + \dots \leq x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \dots$$

Poglejmo si uporabo tega kriterija na dveh konkretnih primerih.

Najprej pogledjmo vrsto $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. Ta vrsta konvergira natanko takrat, ko konvergira vrsta

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k \ln 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln 2}.$$

Ker vrsta na desni divergira, torej tudi vrsta $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ divergira.

Po drugi strani pa vrsta $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ konvergira natanko takrat, ko konvergira vrsta

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k \ln^2 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln^2 2}.$$

Tokrat pa vrsta na desni konvergira. □

- (10) Naj bo (a_n) konvergentno zaporedje pozitivnih realnih števil z limito $a > 0$. Obravnavaj konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{a_n} \right)^n,$$

kjer je $x > 0$.

Rešitev: Z uporabo korenskega kriterija dobimo

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{x}{a_n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{a_n} = \frac{x}{a}.$$

Torej velja:

- če je $x < a$, vrsta konvergira,
- če je $x > a$, vrsta divergira.

V primeru, ko je $x = a$, pa se lahko zgodi oboje, odvisno od zaporedja (a_n) . Če izberemo na primer $a_n = \sqrt[n]{n}$, je $a = x = 1$, vrsta pa je enaka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

V tem primeru torej vrsta divergira.

Če izberemo $a_n = \sqrt[n]{n^2}$, pa dobimo konvergentno vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

□

- (11) Naj bosta b in c pozitivni realni števili in definirajmo zaporedje (a_n) s predpisom

$$a_n = \frac{b(b+1)(b+2) \dots (b+n-1)}{c(c+1)(c+2) \dots (c+n-1)}.$$

- (a) Obravnavaj konvergenco vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$.
- (b) Naj bo $c > b$. Dokaži, da zaporedje (a_n) konvergira in določi njegovo limito.
- (c) Izračunaj limito $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

Rešitev: (a) Poskusimo najprej s kvocientnim kriterijem

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{b(b+1)(b+2)\dots(b+n)}{c(c+1)(c+2)\dots(c+n)(n+1)}}{\frac{b(b+1)(b+2)\dots(b+n-1)}{c(c+1)(c+2)\dots(c+n-1)n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b+n)n}{(c+n)(n+1)} = 1.$$

Kot vidimo, zaenkrat še ne moremo sklepati o konvergenci vrste, zato poskusimo še z Raabejevim kriterijem

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{(c+n)(n+1)}{(b+n)n} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{n^2 + n + cn + c - n^2 - bn}{n^2 + bn} \right) = c + 1 - b.$$

Od tod sklepamo:

- če je $c > b$, vrsta konvergira,
- če je $c < b$, vrsta divergira.

Ostane nam še primer, ko je $c = b$. V tem primeru je $a_n = 1$, zato imamo opravka s harmonično vrsto, ki pa seveda divergira.

(b) Naj bo $c > b$. Kot smo že prej spotoma izračunali, je kvocient dveh zaporednih členov zaporedja (a_n) enak

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b+n}{c+n} < 1,$$

kar pomeni, da je zaporedje padajoče. Ker so vsi členi pozitivni, je navzdol omejeno z nič, od koder pa sledi, da je zaporedje konvergentno.

Označimo njegovo limito z a . Ker so členi zaporedja (a_n) pozitivna števila, je $a \geq 0$, z uporabo prejšnje naloge pa bomo pokazali, da je $a = 0$. Pa denimo, da je $a > 0$. Ker je zaporedje padajoče, potem velja $a_n > a$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Torej bi lahko ocenili

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n} = a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

kar bi pomenilo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ divergira. Malce prej pa smo pokazali, da dana vrsta konvergira. Torej mora v primeru, ko je $b < c$, veljati

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b(b+1)(b+2)\dots(b+n-1)}{c(c+1)(c+2)\dots(c+n-1)} = 0.$$

(c) Sedaj računamo limito $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$. Izraz za limito bomo izrazili z zaporedjem (a_n) . Vzemimo $b = 1$ in $c = \frac{3}{2}$. Potem je

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \dots \frac{2n+1}{2}}.$$

Če števec in imenoalec zgornjega ulomka pomnožimo z 2^n , dobimo ravno

$$a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Ker je $\frac{3}{2} > 1$, torej po nalogi (b) sledi, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = 0.$$

□

Do sedaj smo se ukvarjali z vrstami s pozitivnimi členi in spoznali definicijo vsote takšne vrste. Ta vsota je bodisi neko pozitivno realno število, ali pa je neskončna. Če vsi členi v vrsti niso pozitivni, pa se stvari malce zakomplicirajo. Za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ z ne nujno pozitivnimi členi rečemo, da:

- konvergira absolutno, če konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$,
- konvergira pogojno, če konvergira, a ne konvergira absolutno.

Absolutno konvergentne vrste imajo lastnosti, na katere smo navajeni pri seštevanju števil. Tako je na primer vsota absolutno konvergentne vrste neodvisna od vrstnega reda členov. Vsota pogojno konvergentne vrste pa je po drugi strani odvisna od vrstnega reda členov. Če primerno zamenjamo vrstni red, lahko dobimo celo poljubno vsoto.

Če ima vrsta pozitivne člene, je konvergenca ekvivalentna absolutni konvergenci.

(12) Obravnavaj absolutno in pogojno konvergenco naslednjih vrst:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$,
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1-a^n}$, $|a| \neq 1$.

Rešitev:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$:

Členi vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$ niso nujno pozitivni. Zato najprej poskusimo ugotoviti, če konvergira absolutno. Iz ocene $|\sin x| \leq 1$, dobimo oceno

$$\left| \frac{\sin n}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Od tod sledi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{2^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Po primerjalnem kriteriju tako dobimo, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$ absolutno konvergentna.

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1-a^n} :$$

Imamo vrsto s splošnim členom $a_n = \frac{a^n}{1-a^n}$, ki v splošnem nima samo pozitivnih členov. Če je $|a| > 1$, je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1-a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{a^n} - 1} = -1,$$

od koder sledi, da vrsta divergira.

Če je $|a| < 1$, pa je vrsta absolutno konvergentna. To lahko na primer dokažemo z uporabo korenskega kriterija, saj je

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{a^n}{1-a^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{|1-a^n|}} = |a|.$$

□

(13) Obravnavaj absolutno in pogojno konvergenco naslednjih vrst:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}, \alpha > 0,$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n},$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \operatorname{tg} \frac{1}{n},$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)a^{2n}}, a > 0.$$

Rešitev: Med vrstami z ne nujno pozitivnimi členi so najbolj pogoste alternirajoče vrste, pri katerih se predznaki členov izmenjujejo. To pomeni, da je $a_n a_{n+1} < 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Za alternirajoče vrste lahko pogosto uporabimo:

Leibnizev kriterij: Če absolutne vrednosti

$$|a_1| > |a_2| > |a_3| > \dots$$

členov alternirajoče vrste monotono padajo proti nič, je vrsta konvergentna.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha} :$$

Vemo že, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ absolutno konvergentna natanko tedaj, ko je $\alpha > 1$.

Za dokaz konvergence vrste bomo uporabili Leibnizev kriterij. Vrsta je alternirajoča, zaporedje absolutnih vrednosti členov vrste

$$1, \frac{1}{2^\alpha}, \frac{1}{3^\alpha}, \frac{1}{4^\alpha}, \dots$$

pa monotonno pada proti nič, saj je funkcija $f(x) = x^\alpha$ za $\alpha > 0$ naraščajoča, zvezna na $[0, \infty)$ in $f(0) = 0$. Od tod sklepamo, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ konvergentna za vsak $\alpha > 0$, kar pa pomeni, da je za $0 < \alpha \leq 1$ vrsta pogojno konvergentna.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n} :$

Pokažimo najprej, da vrsta ne konvergira absolutno. Za $x \in [0, 1]$ velja ocena $\operatorname{tg} x \geq x$, od koder sledi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Z uporabo Leibnizevega kriterija bomo spet pokazali, da vrsta konvergira. Je alternirajoča, zaporedje absolutnih vrednosti členov vrste

$$\operatorname{tg} 1, \operatorname{tg} \frac{1}{2}, \operatorname{tg} \frac{1}{3}, \operatorname{tg} \frac{1}{4}, \dots$$

pa monotonno pada proti nič, saj je funkcija tg naraščajoča in zvezna na $[0, 1]$ ter $\operatorname{tg}(0) = 0$. Torej je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$ pogojno konvergentna.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 + \frac{1}{n})^{-n} \operatorname{tg} \frac{1}{n} :$

Ker je $(1 + \frac{1}{n})^n < 3$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, imamo oceno

$$|a_n| = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{n}}{(1 + \frac{1}{n})^n} > \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{1}{n}.$$

Torej je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| > \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n}.$$

Pri prejšnji nalogi smo že pokazali, da vrsta na desni divergira, od koder sledi, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 + \frac{1}{n})^{-n} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$ ni absolutno konvergentna.

Ta vrsta je alternirajoča, absolutne vrednosti členov pa so

$$|a_n| = (1 + \frac{1}{n})^{-n} \operatorname{tg} \frac{1}{n} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{n}}{(1 + \frac{1}{n})^n}.$$

Zaporedje $\lg \frac{1}{n}$ je padajoče z limito 0, zaporedje $(1 + \frac{1}{n})^n$ pa naraščajoče z limito e . Od tod sledi, da je zaporedje $|a_n|$ padajoče z limito 0. Po Leibnizevem kriteriju je torej dana vrsta konvergentna. Ker ni absolutno konvergentna, je pogojno konvergentna.

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)a^{2n}} :$$

Vrsta iz absolutnih vrednosti $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)a^n}$ konvergira, če je $a > 1$. Če je $a = 1$, dobimo alternirajočo harmonično vrsto, ki konvergira po Leibnizevem kriteriju. V primeru $a < 1$ pa členi zaporedja $|a_n|$ rastejo čez vse meje, zato je vrsta divergentna.

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)a^n}$ je torej absolutno konvergentna za $a > 1$, pogojno konvergentna pri $a = 1$ ter divergentna za $a < 1$. $\square$

(14) Obravnavaj absolutno in pogojno konvergenco vrste

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots$$

Rešitev: Vrsta je alternirajoča, vendar pa absolutne vrednosti njenih členov ne padajo monotono proti nič, zato Leibnizevega kriterija ne moremo uporabiti. Pokazali bomo celo, da vrsta divergira.

Razdelimo vrsto tako, da vzamemo skupaj po dva zaporedna člena. Za vsak $n > 1$ tako dobimo

$$\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} = \frac{\sqrt{n}+1 - (\sqrt{n}-1)}{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+1)} = \frac{2}{n-1}.$$

Od tod sledi, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$s_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} = \sum_{n=2}^{n+1} \frac{2}{n-1}.$$

Vemo, da harmonična vrsta divergira, zato sode delne vsote naraščajo proti neskončnosti. To pa pomeni, da je dana vrsta divergentna. $\square$

(15) Z upoštevanjem rezultata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

poišči vsoto spodnje vrste, ki jo dobimo z zamenjavo vrstnega reda členov dane vrste:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \dots$$

Rešitev: Vsoto prvih treh členov in naslednjih treh členov lahko zapišemo v obliki:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right),$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right).$$

Vsoto n -te trojice členov pa lahko izrazimo v obliki

$$\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right).$$

Z upoštevanjem vsote

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \ln 2$$

od tod sledi

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots = \frac{1}{2} \ln 2.$$

Vidimo, da smo z zamenjavo vrstnega reda seštevanja dobili drugačno vsoto. S primerno izbiro vrstnega reda bi lahko celo dosegli, da je vsota vrste poljubno realno število. $\square$