

KARAKTERIZACIJE OBRNLJIVIH MATRIK

Definicija. Matrika B je *inverz* matrike A , če velja $AB = BA = I$. Matrika, ki ima inverz, je *obrnljiva*, sicer pa je *neobrnljiva*.

Trditev 1. Vsaka obrnljiva matrika je kvadratna in ima en sam inverz.

Dokaz. Če je A $m \times n$ matrika in B $p \times q$ matrika, potem je produkt AB definiran, če je $n = p$ in produkt BA je definiran, če je $q = m$. Torej je B $n \times m$ matrika, AB $m \times m$ matrika in BA $n \times n$ matrika. Ker je $AB = BA$, je $m = n$. Torej je A kvadratna. Če sta B in C inverza matrike A , potem velja $B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$. $\square$

V nadaljevanju bomo inverz matrike A (če obstaja) označili z A^{-1} .

Zgled. Matrike, ki imajo ničelno vrstico ali stolpec so neobrnljive. Elementarne matrike so obrnljive. Velja namreč $E_{ij}(\alpha)^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$, $E_i(\alpha)^{-1} = E_i(1/\alpha)$ in $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$.

Trditev 2. Produkt obrnljivih matrik je obrnljiva matrika.

Dokaz. Če sta A in B obrnljivi matriki, potem velja $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = AIA^{-1} = I$ in $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}IB = I$. Torej je AB obrnljiva in velja $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. $\square$

Trditev 3. Transponiranka obrnljive matrike je obrnljiva matrika.

Dokaz. Če je A obrnljiva, potem je $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, odkoder sledi $(A^{-1})^T A^T = A^T (A^{-1})^T = I^T = I$. Torej je A^T obrnljiva in velja $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. $\square$

Vsako $n \times n$ matriko A lahko zapišemo kot $A = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n]$, kjer so $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ stolpci matrike A . Potem za vsako $n \times n$ matriko C velja

$$CA = C[\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n] = [C\mathbf{a}_1 \dots C\mathbf{a}_n]$$

in za vsak (stolpčni) vektor $\mathbf{x}$ velja

$$A\mathbf{x} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n.$$

Spomnimo se, da so stolpci matrike A *linearno neodvisni*, če za vsake $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, ki zadoščajo $x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$, velja $x_1 = \dots = x_n = 0$. (Ekvivalentno, če za vsak $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ki zadošča $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, velja

$\mathbf{x} = 0$.) Spomnimo se, da so stolpci matrike A *ogrodje*, če za vsak $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ obstajajo taki $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, da velja $\mathbf{b} = x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n$. (Ekvivalentno, če za vsak $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ obstaja tak $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, da velja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.)

Trditev 4. *Naj bo A poljubna $n \times n$ matrika in C poljubna obrnljiva $n \times n$ matrika. Če so stolpci matrike A linearno neodvisni, potem so tudi stolpci matrike CA linearno neodvisni. Če so stolpci matrike A ogrodje, potem so tudi stolpci matrike CA ogrodje.*

Dokaz. Recimo, da so stolpci matrike A linearno neodvisni, se pravi, da iz $A\mathbf{x} = 0$ sledi $\mathbf{x} = 0$. Radi bi pokazali, da so potem tudi stolpci matrike CA linearno neodvisni, se pravi, da iz $CA\mathbf{x} = 0$ sledi $\mathbf{x} = 0$. Iz $CA\mathbf{x} = 0$ sledi $A\mathbf{x} = C^{-1}(CA\mathbf{x}) = C^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$, torej je res $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Pokažimo še drugi del. Recimo, da so stolpci matrike A ogrodje. Torej za vsak $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ obstaja tak $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, da velja $A\mathbf{x} = C^{-1}\mathbf{b}$. Če pomnožimo s C , dobimo, da za vsak $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ obstaja tak $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, da velja $CA\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Torej so stolpci matrike CA res ogrodje. $\square$

Trditev 5. *Če je kvadratna matrika A vrstična kanonična forma, potem so naslednje trditve ekvivalentne:*

- (1) *Stolpci A so linearno neodvisni.*
- (2) *Stolpci A so ogrodje.*
- (3) *A je identična matrika.*

Dokaz. Očitno iz točke 3 sledita točki 1 in 2. Pokažimo še, da iz negacije točke 3 sledita negaciji točk 1 in 2.

Če kvadratna vrstična kanonična forma ni identiteta, potem ima stopnico, ki je daljša od 1. Ker je stolpec, ki je na drugem mestu v neki stopnici, linearna kombinacija prejšnjih stolpcev, stolpci take matrike niso linearno neodvisni.

Po drugi strani iz obstoja stopnice, ki je daljša od 1, sledi, da stopnišče ne pride do zadnje vrstice. Zadnja vrstica je torej ničelna. Linearna ogrinjača stolpcev torej ne vsebuje vektorjev, ki imajo zadnjo komponento neničelno. Stolpci matrike A zato niso ogrodje. $\square$

Iz trditev 4 in 5 izpeljemo naslednjo posledico.

Posledica 1. *Za vsako kvadratno matriko A so ekvivalentne trditve:*

- (1) *Stolpci A so linearno neodvisni.*
- (2) *Stolpci A so ogrodje.*
- (3) *Matrika A je produkt elementarnih matrik.*

Dokaz. Ker ima identična matrika linearno neodvisne stolpce in ker so elementarne matrike obrnljive, ima po trditvi 4 tudi produkt elementarnih matrik linearno neodvisne stolpce. Torej iz točke 3 sledi točka 1. Podobno dokažemo, da iz točke 3 sledi točka 2.

Dokažimo sedaj, da iz točke 1 sledi točka 3. Dokaz, da iz točke 2 sledi točka 3 je podoben. Po Gaussovem algoritmu obstajajo take elementarne matrice $E_1, \dots, E_k$, da je $A' := E_k \cdots E_1 A$ vrstična kanonična forma. Če so stolpci A linearno neodvisni, so po trditvi 4 tudi stolpci A' linearno neodvisni. Po trditvi 5 sledi, da je $A' = I$. Ker so E_i obrnljive matrice, sledi $A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$. Ker je inverz elementarne matrice elementarna matrika, je torej A produkt elementarnih matrik. $\square$

Dokažimo še naslednjo posledico:

Posledica 2. *Za vsako kvadratno matriko A so ekvivalentne trditve:*

- (1) A je obrnljiva.
- (2) Obstaja taka matrika B , da je $AB = I$.
- (3) Stolpci A so ogrodje.

Dokaz. Očitno iz točke 1 sledi točka 2. Po posledici 1 iz točke 3 sledi točka 1, saj je produkt elementarnih matrik obrnljiva matrika.

Dokažimo še, da iz točke 2 sledi točka 3. Pišimo $B = [\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n]$ in $I = [\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n]$. Iz $AB = I$ sledi $A\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{b}_n = \mathbf{e}_n$. Odtod sledi, da za vsak vektor $\mathbf{b} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$ vektor $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + \dots + x_n\mathbf{b}_n$ zadošča $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Torej so stolpci matrice A ogrodje. $\square$

Povzemimo vse rezultate v naslednji izrek:

Izrek 1. *Za vsako kvadratno matriko A so ekvivalentne trditve:*

- (1) A je obrnljiva.
- (2) Obstaja taka matrika B , da je $AB = I$.
- (3) Stolpci A so ogrodje.
- (4) Za vsak $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ obstaja tak $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, da velja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- (5) Stolpci A so linearno neodvisni.
- (6) Za vsak $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ki zadošča $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, velja $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- (7) A je produkt elementarnih matrik.
- (8) Vrstična kanonična forma za A je identiteta.

Če uporabimo izrek na matriki A^T namesto A in če upoštevamo trditve 3, potem dobimo naslednjo posledico:

Izrek 2. *Za vsako kvadratno matriko A so ekvivalentne trditve:*

- (1) A je obrnljiva.
- (2) A^T je obrnljiva.
- (3) Obstaja taka matrika B , da je $BA = I$.
- (4) Vrstice A so ogrodje.
- (5) Vrstice A so linearno neodvisne.