

4. kolokvij iz Analize 1

24. 5. 2011

Čas pisanja je 100 minut. Možno je doseči 100 točk.

Veliko uspeha!

Naloga 1

V polarnih koordinatah sta z enačbama

$$r^2 = \frac{1}{2 - \sin^2 \varphi} \quad \text{in} \quad r = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

podani zanki v ravnini. Izračunaj ploščino lika, ki ga objemata obe zanki.

Naloga 2

Dana so pozitivna števila $a, b, c > 0$. Obravnavaj konvergenco vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+c)(a+2c) \cdots (a+nc)}{b(b+c)(b+2c) \cdots (b+nc)}.$$

Naloga 3

Naj bo $a_n > 0$ zaporedje pozitivnih števil, ki konvergirajo proti $a \in \mathbb{R}$. Definirajmo funkcijsko zaporedje $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}(a_n x).$$

- a) Ugotovi, da zaporedje f_n konvergira po točkah na \mathbb{R} .
- b) Dokaži, da zaporedje f_n ne konvergira enakomerno na \mathbb{R} , če je $a = 0$.
- c) Dokaži, da zaporedje f_n enakomerno konvergira, če je $a > 0$.

Naloga 4

Za točke (x, y) v ravnini \mathbb{R}^2 je dan predpis

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |x_2 - x_1| & ; \quad y_2 = y_1 \\ |x_2| + |y_2 - y_1| + |x_1| & ; \quad y_2 \neq y_1 \end{cases}$$

- a) Dokaži, da predpis d določa metriko na množici \mathbb{R}^2 .
- b) Skiciraj odprti krogi $K((1, 0), 1)$ in $K((1, 0), 2)$.