

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Ime in priimek



Sedež (2.01)

1
2
3
4
Σ

--	--	--	--	--	--

Vpisna številka



1. naloga (25 točk)

Poišči družino ortogonalnih trajektorij k družini krivulj

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = C(xy)^2 \quad (C \neq 0),$$

2. naloga (25 točk)

Poišči vse rešitve enačbe

$$y^{\frac{2}{3}} + (y')^{\frac{2}{3}} = 1.$$

3. naloga (25 točk)

Naj bo y dvakrat zvezno odvedljiva funkcija na intervalu $(0, 1]$. Za $x \in (0, 1)$ označimo s P_x ploščino trikotnika z oglišči $(0, 0)$, $(x, y(x))$ in $(x^*, 0)$, kjer je x^* abscisa presečišča tangente na graf funkcije y v točki $(x, y(x))$ z abscisno osjo. Za $x \in (0, 1)$ z S_x označimo ploščino trikotnika z oglišči $(x, 0)$, $(x, y(x))$ in $(x^*, 0)$. Za $x \in (0, 1)$ z $A(x)$ označimo ploščino območja med grafom funkcije y in abscisno osjo nad intervalom $[x, 1]$.

a) Izberimo $a \in \mathbb{R}$. Dokaži, da vsaka dvakrat zvezno odvedljiva padajoča funkcija y na $(0, 1]$, ki zadošča

$$A(x) = S_x + P_x + a$$

za vsak $x \in (0, 1)$, ustreza diferencialni enačbi

$$\frac{y - xy'}{y^2} = \frac{2y''}{y'^2}.$$

b) Določi vse padajoče dvakrat zvezno odvedljive funkcije y na intervalu $(0, 1]$, ki zadoščajo $y(1) = 1$ in $y'(1) = -2$ ter vse $a \in \mathbb{R}$, da za vse $x \in (0, 1)$ velja

$$A(x) = S_x + P_x + a.$$

4. naloga (25 točk)

Podana je Cauchyjeva naloga

$$\begin{aligned}y' &= e^{-y^2}(y^{2014} - y^{2013}) \\ y(x_0) &= y_0.\end{aligned}$$

a) Dokaži, da obstaja natanko ena zvezno odvedljiva funkcija y na $\mathbb{R}$, ki reši zgornjo Cauchyjevo nalogo.

b) Ali obstajata taka x_0 in $y_0 \in \mathbb{R}$ in taka a in $b \in \mathbb{R}$, da graf rešitve zgornje Cauchyjeve naloge poteka skozi točki $(a, \frac{1}{2})$ in $(b, \frac{3}{2})$?