

ANALIZA 1
13. domača naloga

(1) Po definiciji preveri, da je funkcija $\sqrt[3]{x}$ zvezna na $\mathbb{R}$.

(2) Naj bo

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}.$$

(a) Določi definicijsko območje D_f funkcije f in množico $A = \{x \in D_f \mid f \text{ zvezna v } x\}$.

(b) Naj bo

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ b, & x = 0. \end{cases}$$

Določi tak b , da bo g zvezna funkcija na $A \cup \{0\}$.

(c) Za izbran $\varepsilon > 0$ določi $\delta > 0$, za katerega velja

$$|x - 0| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(0)| < \varepsilon.$$

(a) $D_f = [-1, 0) \cup (0, \infty) = A$.

(b) $b = \frac{1}{2}$.

(c) Sklep velja za $\delta = \min\{1, 2\varepsilon\}$ (in gotovo tudi za vse manjše δ).

(3) Naj bo

$$f(x) = \begin{cases} -x - 5, & x \leq -2, \\ ax^2 + b, & -2 < x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1. \end{cases}$$

Določi taki realni števili a in b , da bo funkcija f zvezna na $\mathbb{R}$. Pri tako določenih a in b poišči zalogo vrednosti funkcije f ter ugotovi ali je injektivna.

$a = -1$, $b = 1$, $Z_f = [-3, \infty)$. Funkcija f ni injektivna.

(4) Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \frac{2e^{\frac{1}{2x}} + a}{\sqrt{a^2 - 1 + e^{\frac{1}{x}}}}.$$

(a) Določi definicijsko območje funkcije f v odvisnosti od realnega parametra a .

(b) Za katere vrednosti parametra a je mogoče izbrati tak $f(0)$, da bo dobljena funkcija zvezna v 0?

(c) Za katere vrednosti parametra a je mogoče funkcijo f zvezno razširiti na $\mathbb{R}$?

(a) Če je $|a| \geq 1$, potem je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Če je $|a| < 1$, potem je $D_f = \left(-\infty, \frac{1}{\ln(1-a^2)}\right) \cup (0, \infty)$.

(b) Za $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(c) Za $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(5)* Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je dana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x \left[\frac{2}{x} \right], & x \neq 0, \\ k, & x = 0, \end{cases}$$

kjer $[y]$ pomeni celi del od y , to je največje celo število, ki ni večje od y .

(a) Določi tako konstanto k , da bo funkcija f zvezna v 0, če je to mogoče.

(b) Ugotovi, v katerih točkah je funkcija f zvezna in v katerih točkah funkcija f ni zvezna. (Nasvet: leva in desna limita)

(a) $k = 2$. (b) f ni zvezna v točkah $\frac{2}{m}$ za $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, drugje je zvezna.