

ANALIZA 1
14. domača naloga

- (1) Pokaži, da ima enačba $\sin x = x^2 - 1$ vsaj eno rešitev na intervalu $[1, \pi]$. Določi jo na dve decimalki natančno.

1,41.

- (2) Naj bosta $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezni funkciji in $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taka funkcija, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ali $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

- (a) Določi zvezni funkciji $g_1, h_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za kateri velja

$$g_1(x) \leq f(x) \leq h_1(x)$$

pri poljubnem $x \in \mathbb{R}$ in je za vsak $a \in \mathbb{R}$, kjer je $g(a) = h(a)$, tudi $g_1(a) = h_1(a)$.

- (b) Naj bo $a \in \mathbb{R}$ taka točka, da velja $g(a) = h(a)$. Pokaži, da je funkcija f zvezna v točki a .

- (3) Naj bosta $f, g: [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ zvezni funkciji, za kateri velja

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} f(x) = \sup_{0 \leq x \leq 1} g(x) .$$

Pokaži, da za neki $t \in [0, 1]$ velja

$$f(t)^2 + 3f(t) = g(t)^2 + 3g(t) .$$

- (4) Naj bo f funkcija na zaprtem intervalu $[0, 1]$, ki racionalna števila slika v iracionalna, iracionalna pa v racionalna.

- (a) Pokaži, da je zaloga vrednosti funkcije f kvečjemu števna.

- (b) Pokaži, da f ni zvezna funkcija.

- (5) Označimo z $\mathcal{A}$ množico vseh funkcij $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, katerih graf je vsebovan v enotski krožnici $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$. (Graf funkcije $f: X \rightarrow Y$ je množica točk $(x, f(x)) \in X \times Y$.)

- (a) Dokaži, da je vsaka funkcija $f \in \mathcal{A}$ zvezna vsaj v dveh točkah.

- (b) Konstruiraj tako funkcijo $f \in \mathcal{A}$, ki je zvezna natanko v dveh točkah.

- (c) Poišči vse zvezne funkcije iz $\mathcal{A}$.

- (6)* Dokaži, da ne obstaja zvezna surjektivna preslikava $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pri kateri bi za vsak $y \in \mathbb{R}$ praslila $f^{-1}(y)$ vsebovala natanko dve točki. (Namig: Opazuj zalogo vrednosti funkcije f na intervalu med njenima ničloma in zunaj tega intervala!)

- (7) Izračunaj limite:

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x^3 - 1} \right)^{x^3 + 2x}$	(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x}$	(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + 5^x)}{\ln(1 + 3^x)}$
(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{1 - \cos 5x}$	(e) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x + 5}{x^2 - 1} \right)^{\frac{16}{x-3}}$	(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{x} \right)$
(g) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[5]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$	(h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{1-x^3}$	(i) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$

(a) e^2 . (b) $\frac{3}{4}$. (c) $\frac{\ln 5}{\ln 3}$. (d) $\frac{18}{25}$. (e) e^{-10} . (f) 1. (g) $\frac{3}{5}$. (h) $-\frac{1}{3}$. (i) e

- (8) Če obstaja

$$\lim_{x \rightarrow 3} \operatorname{th} \left(\frac{1}{x-3} \right)$$

jo izračunaj. (Pomagaj si z grafom funkcije tangens hiperbolikus.)

- (9) Naj bo n naravno število. Izračunaj limito

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^n x}{x \sin(nx)} .$$

$\frac{1}{2}$.

- (10)* Določi vsa realna števila a , za katera ima funkcija $\operatorname{tg} x + a \operatorname{tg} 3x$ končno limito pri $\frac{\pi}{2}$ in jo pri teh a tudi izračunaj.

$a = -3$, limita je 0.