

Algebra 1: 2. kolokvij

17. 12. 2014

Čas pisanja je 110 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25)

Poišči vse $\lambda \in \mathbb{R}$, za katere je spodnji sistem rešljiv in ga reši.

$$\begin{array}{rcccccl} 5x & + & (10 - \lambda)y & - & (\lambda + 6)z & = & 5 - \lambda \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & (4 - \lambda)y & - & z & = & 2 \end{array}$$

2. naloga (25)

Označimo $a = 6 + \sqrt{5}$. Ali obstaja tako naravno število n , da je determinanta velikosti $n \times n$

[illegible]

enaka 2014?

(Pri izračunu determinante si lahko pomagaš z odštevanjem vrstic na primeren način ali pa determinanto direktno izračunaš.)

3. naloga (25)

Množico $\mathbb{R}^3$ opremimo z operacijo $\circ$, definirano s predpisom

$$(a, b, c) \circ (x, y, z) = (a + x, b + y, c + z + ay).$$

a) Dokaži, da je $(\mathbb{R}^3, \circ)$ grupa.

b) Dokaži, da je množica matrik $\mathcal{H}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ grupa za običajni matrični produkt $\cdot$.

c) Dokaži, da je preslikava $\varphi : (\mathbb{R}^3, \circ) \rightarrow (\mathcal{H}_3, \cdot)$, definirana s predpisom $\varphi : (a, b, c) \mapsto \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, homomorfizem grup.

d) Ali sta zgornji grupi izomorfni?

4. naloga (25)

Naj bo $n \in \mathbb{N}$ poljubno naravno število in naj bo $\pi \in S_n$ poljubna permutacija.

a) V primeru $n = 3$ izračunaj $E_{12} \cdot E_{23}$ in $E_{12} \cdot E_{31}$.

b) Izračunaj $E_{ij} \cdot E_{kl}$ in $E_{\pi(i)\pi(j)} \cdot E_{\pi(k)\pi(l)}$.

c) Če je $n = 2$, dokaži, da je $(E_{1\pi(1)} + E_{2\pi(2)})^2 = I$.

d) Naj bo $1 \leq k \leq n$. Dokaži, da je

$$(E_{1\pi(1)} + \cdots + E_{n\pi(n)})^k = I$$

natanko takrat, ko velja $\pi^k = \text{Id}$.