

ANALIZA 1
18. domača naloga

- (1) Naj bo $a > 0$. Dokaži, da za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja

$$\left| \ln \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{y + \sqrt{a^2 + y^2}} \right| \leq \frac{|x - y|}{a}.$$

Poišči največji interval, na katerem je funkcija $f(x) = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$ enakomerno zvezna. Na tem intervalu za dan $\varepsilon > 0$ poišči $\delta > 0$, ki bo ustrezal definiciji enakomerne zveznosti.

Funkcija je enakomerno zvezna na $\mathbb{R}$. Za δ lahko vzamemo poljubno število na intervalu $(0, a\varepsilon)$.

- (2)* Naj bo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija in naj bo $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 f'(x) = 0$. Dokaži, da obstaja $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, in sicer tako, da najprej pokažeš, da velja točka (a), nato, da velja (b), in na koncu, da obstaja limita.
(a) Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $x_0 > 0$, da za vsak $x > x_0$ in vsak $c > 1$ velja

$$|f(x) - f(cx)| < \frac{\varepsilon(c-1)}{x}.$$

- (b) Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $x_0 > 0$, da za vsak $x > x_0$, vsak $c > 1$ in vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$|f(x) - f(c^n x)| < \frac{\varepsilon c}{x}.$$

- (3) Izračunaj naslednje limite.

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$	(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x}$	(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{e^x}$
(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[5]{x-1}}$	(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \arctg 3x}{\sin 5x}$	(f) $\lim_{x \downarrow 0} x \ln^3 x$
(g) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1)$	(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg x - \sin x}{x^3}$	(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \arctg x}{x^6 + x^2 + 1}$
(j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{2x}$	(k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{(e^x - 1)^2}$	(l) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + e^x}{2 \sin x} - \frac{1}{x} \right)$
(m) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a}{x} - \frac{\ln(1 + ax)}{x^2} \right)$	(n) $\lim_{x \downarrow 0} x^{\frac{1}{1-x}}$	(o) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

(a) 1 (b) 0 (c) 0 (d) 0 (e) $\frac{3}{5}$ (f) 0 (g) 1 (h) $\frac{1}{2}$ (i) 0 (j) $-\frac{1}{2}$ (k) 1 (l) $\frac{1}{2}$ (m) $\frac{a^2}{2}$ (n) 0 (o) $\frac{1}{e}$

- (4) Izračunaj naslednje limite.

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 2^x}{x}$	(b) $\lim_{x \rightarrow e} (\ln x)^{1/(x-e)}$	(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2} \cos x}{x^4}$
(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$	(e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x^2 - \frac{4x-4}{x+1}}{\sin^3(\pi x)}$	(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2 \arccos x) - 2x}{x^3}$
(g) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \tg x}{\cos 2x}$	(h) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{1/x}$	(i) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{\sin(\pi x)} + \frac{\cos(\pi x)}{\pi(1-x)} \right)$
(j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$	(k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{x^n}$	(l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3}$
(m) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tg x)^{\tg 2x}$	(n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 - 2x + 3} \right)$	

(a) ∞ (b) $e^{1/e}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{6}$ (e) $-\frac{1}{6\pi^3}$ (f) -1 (g) -1 (h) e^2 (i) $-\frac{1}{\pi}$ (j) 0 (k) 2^n (l) $\frac{1}{3}$ (m) $\frac{1}{e}$ (n) -2

- (5) Pokaži, da za x blizu 0 velja približek $\arcsin x \approx x + \frac{1}{6}x^3$ v naslednjem smislu: ko gre x proti 0, gre razlika med levo in desno stranjo proti 0 hitreje kot funkcija $x \mapsto x^4$.
(6) Naj trikrat zvezno odvedljiva funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadošča enačbi $\exp(f(x)) + f(x) = 1 + x$. Določi konstanti A in B tako, da bo obstajala (končna) limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - Ax - B}{x^2}$$

in to limito izračunaj!

$A = 1/2$, $B = 0$, limita je enaka $-1/16$.