

Algebra 1: 3. kolokvij

4. 3. 2015

Čas pisanja je 110 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

Ime in priimek _____

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25)

Naj bosta

$$\mathcal{U} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(0) + 2p''\left(\frac{1}{2}\right) = 0\}$$

in

$$\mathcal{V} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(0) - p(1) = p'(1) - p'(0) = 0\}$$

podmnožici vektorskega prostora $\mathbb{R}_4[x]$ realnih polinomov stopnje največ štiri.

a) (8) Dokaži, da sta $\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$ vektorska podprostora v $\mathbb{R}_4[x]$.

b) (17) Določi baze podprostorov $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ in $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

2. naloga (25)

Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna vektorja v $\mathbb{R}^3$.

a) (15) Dokaži, da sta preslikavi $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definirani s predpisoma

$$\mathcal{A}x = (\vec{a} \cdot \vec{x})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{x})\vec{a} \quad \text{in} \quad \mathcal{B}\vec{x} = (\mathcal{A}\vec{x}) \times \vec{b},$$

linearni in določi matriki, ki jima pripadata glede na bazo $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ prostora $\mathbb{R}^3$.

b) (10) Določi kakšni bazi jedra in zaloge vrednosti preslikave $\mathcal{B}$.

3. naloga (25)

Naj bo t realno število. Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}^3$ je s predpisom

$$\mathcal{A}(x, y, z) = ((1+t)x + ty - tz, -x + tz, (2t-1)x + (2t-1)y + (1-t)z)$$

podana linearna preslikava. V odvisnosti od parametra t izračunaj matriko, ki pripada linearni preslikavi $\mathcal{A}^{2015}$ glede na standardno bazo prostora $\mathbb{R}^3$.

4. naloga (25)

Naj bo $n > 1$ in A kompleksna $n \times n$ matrika. Na vektorskem prostoru $\mathbb{C}^{n,n}$ definiramo preslikavo $\mathcal{T}_A$ s predpisom $\mathcal{T}_A X = AX$.

- a) (5) Dokaži, da je preslikava $\mathcal{T}_A$ linearna.
- b) (13) Dokaži, da je λ lastna vrednost matrike A natanko takrat, ko je λ lastna vrednost linearne preslikave $\mathcal{T}_A$.
- c) (7) Ali ima lahko linearna preslikava $\mathcal{T}_A$ same paroma različne lastne vrednosti?