

LIMITE IN ZVEZNOST FUNKCIJ

1. Po definiciji izračunaj

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x}.$$

2. Izračunaj naslednje limite.

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 6}{x^4 - 2},$

(b) $\lim_{x \rightarrow} \frac{x^3 - x^2 + 2x + 4}{2x^3 - x^2 + 2x + 12},$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2},$

(d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}},$

(e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{13+x} - 4}{x-3},$

(f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 1},$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5 \sin x)}{\sin(5x)},$

(h) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(x - \pi)^2},$

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{a} \quad (a > 0),$

(j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+x) - \cos a}{x},$

(k) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}.$

3. Po definiciji dokaži, da je funkcija $f(x) = \sqrt{x}$ zvezna na $[0, \infty)$.

4. Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + a & : x < 1 \\ bx & : x \geq 1 \end{cases}.$$

Določi vse take možne pare (a, b) , da bo funkcija f zvezna povsod.

5. Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & : x < 0 \\ 2x^2 + a & : 0 \leq x \leq 1 \\ b \cdot \frac{\sin(x-1)}{2x-2} - 1 & : 1 < x \end{cases}.$$

Določi a in b tako, da bo funkcija f zvezna povsod. Skiciraj graf funkcije f .

6. Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \arctg x & : |x| > 1 \\ \arcsin(x) + b & : |x| \leq 1 \end{cases}.$$

Določi a in b tako, da bo funkcija f zvezna povsod. Skiciraj graf funkcije f .

7. Dokaži, da ima enačba

$$\sin x - x = -2$$

rešitev na intervalu $[0, 5]$.

8. Naj bo $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ zvezna funkcija. Dokaži, da obstaja $x \in [0, 1]$, da je $f(x) = x$.
Nasvet: Oglej si funkcijo $g(x) = f(x) - x$. Če $f(0) \neq 0$ in $f(1) \neq 1$, potem $f(0) > 0$ in $f(1) < 1$. Kaj lahko poveš o predznaku števil $g(0)$ in $g(1)$?
9. Dokaži, da je naraščajoča funkcija, definirana na realni osi, zvezna povsod razen v števno mnogo točkah. Nasvet: Naj bo $\mathcal{N}$ množica vseh točk, kjer je f nezvezna. Naj bosta a in b ($a < b$) točki nezveznosti naraščajoče funkcije f . Tedaj obstaja tako racionalno število r_a , da je $f(a_-) < r_a < f(a_+)$. Na podoben način izberimo racionalno število r_b . Tedaj je

$$r_a < f(a^+) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(b_-) < r_b.$$

Oglej si funkcijo $g : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, definirano s predpisom $g(c) = r_c$. Dokaži, da je g injektivna. Odtod sklepaj, da je $\mathbb{N}$ največ števno neskončna.