

Parcialne diferencialn enačbe (PM)

1. kolokvij, Rešitve

1. (25) Z vpeljavo novih koordinat reši enačbo

$$u_x + \frac{x}{y^2}u_y = x^2u$$

pri pogoju $u(0, y) = y$, $y > 0$.

Rešitev: Za eno spremenljivko izberemo rešitev enačbe

$$t_x + \frac{x}{y^2}t_y = 0.$$

Na primer $t = x^2/2 - y^3/3$. Za drugo pa $s = x$, ki je neodvisna od t . Dobimo novo enačbo

$$u_s = s^2u.$$

Njena rešitev je

$$u = C(t)e^{s^3/3} = C(x^2/2 - y^3/3)e^{x^3/3}.$$

Začetni pogoj pove

$$u(0, y) = C(-y^3/3) = y \Rightarrow C(t) = (-3t)^{1/3}.$$

2. (25) Z metodo karakteristik poišči eksplicitno rešitev enačbe

$$xu_x + yu_y = u - x^2 - y^2, \quad u(x, 1) = x - x^2.$$

Ali je ta rešitev enolična?

Rešitev: Karakteristični sistem

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y, \quad \dot{u} = u - x^2 - y^2$$

ima splošno rešitev

$$x = Ce^t, \quad y = De^t, \quad u = Ee^t - (C^2 + D^2)e^{2t}.$$

Iz začetnih pogojev dobimo $C = s$, $D = 1$, $E = s + 1$ oz.

$$x = se^t, \quad y = e^t, \quad u = (s + 1)e^t - (s^2 + 1)e^{2t} = x + y - x^2 - y^2.$$

Preverimo še transferzalnostni pogoj

$$(T) = \begin{vmatrix} s & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Rešitev je enolična.

3. (30) Podan je funkcional

$$F(y) = \int_1^2 y'(1 + x^2 y') dx$$

in pogoja $y(1) = 0$, $y(2) = 1$.

a) Poišči in klasificiraj njegovo stacionarno točko y_s .

b) Pokaži, da se stacionarna točka ne spremeni, če dodamo pogoj

$$\int_1^2 y dx = 2 - 2 \ln 2.$$

$$\text{Pomoč: } \int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

Dodatna (10):

c)* Naj bo $\tilde{y}_s$ stacionarna točka, ki jo dobimo v a), če izpustimo robni pogoj $y(2) = 1$. Pokaži, da velja $F(\tilde{y}_s) \leq F(y_s)$.

Namig: S pravim argumentom se da nalogo rešiti brez računanja!

Rešitev: Euler-Lagrangeov sistem v točki a) pove

$$\frac{d}{dx}(1 + 2x^2 y') = 0 \Rightarrow 1 + 2x^2 y' = C \Rightarrow y_s(x) = E/x + D.$$

Začetni pogoji pa $-E = D = 2$. Ker je $M_x = \mathbb{R}^2$ in $H_L = \text{diag}(0, 2x^2)$, je v tej stacionarni točki minimum.

V točki b) dobimo bolj splošen Euler-Lagrangeov sistem.

$$\frac{d}{dx}(1 + 2x^2 y') = \lambda \Rightarrow 1 + 2x^2 y' = \lambda x + C \Rightarrow y_s(x) = \frac{\lambda}{2} \ln x + E/x + D.$$

Oba robna in integralski pogoj povedo:

$$E + D = 0, \quad \frac{\lambda}{2} \ln 2 + E/2 + D = 1,$$

$$\int_2^2 y_s dx = \lambda \ln 2 - \lambda/2 + E \ln 2 + D = 2 - 2 \ln 2.$$

Dobimo $\lambda = 0$ in $-E = D = 2$, torej isto stacionarno točko.

Pri točki c) je dovolj sledeč razmislek: Po klasifikacijskem izreku vemo, da je v stacionarni točki minimum, vendar pa je $\tilde{y}_s$ stacionarna točka za večjo množico funkcij (ker so v njej tudi funkcije, pri katerih $y(2) \neq 1$). Posledično je ta minimum 'boljši' ali kvečjemu enak...

Lahko pa ga seveda izračunamo $\tilde{y}_s = \frac{1-x}{2x}$ in primerjamo vrednosti $F(y_s)$ in $F(\tilde{y}_s)$.

4. (20) Za $\alpha \in \mathbb{R}$ in gladko funkcijo $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ je podan začetni problem

$$u_x + uu_y = \alpha, \quad u(x, 0) = h(x).$$

- a) Določi h in α tako, da bo imela naloga neskončno mnogo rešitev.
- b) Naj bo $\alpha = 0$ in h nekonstantna funkcija brez ničel. Skiciraj projekcije karakteristik v ravnino (x, y) in utemelji, zakaj rešitev enačbe ne more biti definirana na celi ravnini $\mathbb{R}^2$.

Rešitev: Za neskončno rešitev morata biti izpolnjena pogoja:

$$(T) = h(s) = 0 \quad \text{in} \quad (1, h(s), \alpha) \parallel (1, 0, h'(s)).$$

Torej $h = 0$ in $\alpha = 0$.

Za neničeln h ima karakterističen sistem rešitve

$$x = t + s, \quad y = h(s)t, \quad u = h(s).$$

Projekcije so torej premice $y = h(s)(x - s)$ z ničlo v $x = s$ in smernim koeficientom $h(s)$. Če h ni konstantna, obstajata s_1 in s_2 , da je $h(s_1) \neq h(s_2)$. Dve taki premici pa se sekata.