

Parcialne diferencialn enačbe (PM)

2. kolokvij, 23.4.2015

1. Za $x, y > 0$ je podana enačba

$$xu_{xx} - yu_{yy} + \frac{1}{2}(u_x - u_y) = 0.$$

Pretvori jo v kanonično obliko in poišči rešitev, ki zadošča pogoju $u(x, 0) = 0$ in $u(x, 0) = \sqrt{x}$.

Rešitev: Ker je $\delta = xy > 0$, je enačba hiperbolična. Ustrezni novi spremenljivki sta

$$t = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \quad s = \sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

V njih je enačba oblike $u_{st} = 0$ oz.

$$u = F(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + G(\sqrt{x} - \sqrt{y}).$$

Z upoštevanjem robnih pogojev dobimo $u = \sqrt{x} - \sqrt{y}$.

2. Podana je nehomogena valovna enačba

$$u_{tt} - 4u_{xx} = F(x, t), \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x).$$

- a) Z D'Alembertovo formulo poišči rešitev za $F(x, t) = \cos x$ in $f(x) = g(x) = \sin x$. Pokaži, da je 2π -periodična v spremenljivki x , to je, $u(x + 2\pi, t) = u(x, t)$.
- b) Pokaži, da zgornja lastnost velja za poljubne f, g in F , ki so 2π -periodične v x .

Rešitev: Točka a) je trivialna. Kot rešitev dobimo linearno kombinacijo funkcij $\cos(x \pm ct)$, $\cos x$ in $\sin(x \pm ct)$, ki so vse 2π -periodične. V splošnem velja

$$\begin{aligned} u_h(x+2\pi, t) &= \frac{1}{2} (f(x+2\pi+ct) + f(x+2\pi-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x+2\pi-ct}^{x+2\pi+ct} g(s) ds = \\ &= \frac{1}{2} (f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s'+2\pi) ds' = u_h(x, t), \end{aligned}$$

kjer enakost v drugem členu dobimo z vpeljavo nove spremenljivke $s' = s - 2\pi$. Podoben trik uporabimo za partikularni del $u_p(x, t)$.

3. S separacijo spremenljivk poišči rešitev enačbe

$$u_{tt} + 2u_t - u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad x \in (0, \pi).$$

pri pogojih $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ in $u(x, 0) = u_t(x, 0) = \sin x$.

Rešitev: Z nastavkom $u(x, t) = X(x)T(t)$ dobimo

$$\frac{T'' + 2T'}{T} = \frac{X''}{X} = \mu, \quad X(0) = X(\pi) = 0.$$

Lastne funkcije so

$$\mu_n = -n^2, \quad X_n = C_n \sin nx.$$

Pripadajoče funkcije T_n pa

$$T_n(t) = A_n e^{-t} \cos \sqrt{1 - n^2} t + B_n e^{-t} \sin \sqrt{1 - n^2} t,$$

$$T_1(t) = A_1 e^{-t} + B_1 t e^{-t}.$$

Iz začetnih pogojev dobimo $C_1 A_1 = C_1 B_1 = 1$ in $C_n A_n = C_n B_n = 0$.

4. a) Izračunaj $\mathcal{F}(f)$ za

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}.$$

b) Poišči integralsko rešitev enačbe

$$u_{tt} + 2u_t + u = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

pri pogojih $u(x, 0) = 0$ in $u_t(x, 0) = f(x)$.

Rešitev: Velja

$$F(f)(x) = 2 \sin x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) + 2 \cos x \cdot \frac{1}{x^2}.$$

Za $U = F(u)$ (transformacija po spr. x) dobimo enačbo

$$U_{tt} + 2U_t + U(1 + x^2) = 0.$$

Njena rešitev je

$$U(x, t) = C(x) e^{-x} \cos(xt) + D(x) e^{-x} \sin(xt).$$

Z upoštevanjem začetnih pogojev in uporabo inverzne transformacije dobimo $C(x) = 0$ in $x D(x) = F(f)(x)$, ter $u = F^{-1}(U)$.