

3. Simetrični problem lastnih vrednosti

Bor Plestenjak

NLA

8. marec 2011

Lastne vrednosti

Naj bo A simetrična matrika. Velja:

- vse lastne vrednosti so realne,

Naj bo A simetrična matrika. Velja:

- vse lastne vrednosti so realne,
- Schurova forma je diagonalna matrika,

Naj bo A simetrična matrika. Velja:

- vse lastne vrednosti so realne,
- Schurova forma je diagonalna matrika,
- lastne vrednosti lahko uredimo po velikosti, da velja

$$\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \cdots \leq \lambda_1,$$

Naj bo A simetrična matrika. Velja:

- vse lastne vrednosti so realne,
- Schurova forma je diagonalna matrika,
- lastne vrednosti lahko uredimo po velikosti, da velja

$$\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_1,$$

- pripadajoče lastne vektorje $x_1, \dots, x_n$ lahko izberemo tako, da tvorijo ortonormirano bazo,

Naj bo A simetrična matrika. Velja:

- vse lastne vrednosti so realne,
- Schurova forma je diagonalna matrika,
- lastne vrednosti lahko uredimo po velikosti, da velja

$$\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_1,$$

- pripadajoče lastne vektorje $x_1, \dots, x_n$ lahko izberemo tako, da tvorijo ortonormirano bazo,
- $\|A\|_2 = \max(|\lambda_1|, |\lambda_n|)$.

Rayleighov kvocient

Pri simetričnih matrikah je dovolj obravnavati *Rayleighov kvocient* le za realne vektorje. Za $x \neq 0$ je

$$\rho(x, A) = \frac{x^T A x}{x^T x}.$$

Že od prej poznamo lastnosti:

- Za $\alpha \neq 0$ je $\rho(x, A) = \rho(\alpha x, A)$.
- Za lastni vektor x_i je $\rho(x_i, A) = \lambda_i$.
- Če je x približek za lastni vektor, je $\rho(x, A)$ najboljša aproksimacija za lastno vrednost v smislu, da je $\min_{\sigma \in \mathbb{R}} \|Ax - \sigma x\|_2$ dosežen pri $\sigma = \rho(x, A)$.

Rayleighov kvocient

Pri simetričnih matrikah je dovolj obravnavati *Rayleighov kvocient* le za realne vektorje. Za $x \neq 0$ je

$$\rho(x, A) = \frac{x^T A x}{x^T x}.$$

Že od prej poznamo lastnosti:

- Za $\alpha \neq 0$ je $\rho(x, A) = \rho(\alpha x, A)$.
- Za lastni vektor x_i je $\rho(x_i, A) = \lambda_i$.
- Če je x približek za lastni vektor, je $\rho(x, A)$ najboljša aproksimacija za lastno vrednost v smislu, da je $\min_{\sigma \in \mathbb{R}} \|Ax - \sigma x\|_2$ dosežen pri $\sigma = \rho(x, A)$.

Za simetrične matrike velja še naslednja lastnost.

Lema

Če je A simetrična matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1$, potem za vsak $x \neq 0$ velja

$$\lambda_n \leq \rho(x, A) \leq \lambda_1.$$

Očitno je

$$\lambda_1 = \max_{x \neq 0} \rho(A, x),$$

$$\lambda_n = \min_{x \neq 0} \rho(A, x).$$

Minimaks izrek

Očitno je

$$\lambda_1 = \max_{x \neq 0} \rho(A, x),$$

$$\lambda_n = \min_{x \neq 0} \rho(A, x).$$

Podobno lahko izrazimo tudi vse preostale lastne vrednosti. Rezultat je temelj za številne pomembne teoretične rezultate.

Izrek (Courant–Fischerjev minimaks izrek)

Če je A simetrična matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1$, potem za $i = 1, \dots, n$ velja

$$\lambda_i = \min_{\substack{S \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim(S) = n-i+1}} \max_{\substack{x \in S \\ x \neq 0}} \rho(x, A) = \max_{\substack{R \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim(R) = i}} \min_{\substack{x \in R \\ x \neq 0}} \rho(x, A).$$

Weylov izrek

Naj bodo $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1$ lastne vrednosti simetrične matrike A in $\hat{\lambda}_n \leq \dots \leq \hat{\lambda}_1$ lastne vrednosti simetrične matrike $A + E$.

Posledica

Za $i = 1, \dots, n$ velja $\lambda_i + \lambda_n(E) \leq \hat{\lambda}_i \leq \lambda_i + \lambda_1(E)$.

Weylov izrek

Naj bodo $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1$ lastne vrednosti simetrične matrike A in $\hat{\lambda}_n \leq \dots \leq \hat{\lambda}_1$ lastne vrednosti simetrične matrike $A + E$.

Posledica

Za $i = 1, \dots, n$ velja $\lambda_i + \lambda_n(E) \leq \hat{\lambda}_i \leq \lambda_i + \lambda_1(E)$.

Posledica (Weyl)

Za $i = 1, \dots, n$ velja $|\lambda_i - \hat{\lambda}_i| \leq \|E\|_2$.

Weylov izrek

Naj bodo $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1$ lastne vrednosti simetrične matrike A in $\hat{\lambda}_n \leq \dots \leq \hat{\lambda}_1$ lastne vrednosti simetrične matrike $A + E$.

Posledica

Za $i = 1, \dots, n$ velja $\lambda_i + \lambda_n(E) \leq \hat{\lambda}_i \leq \lambda_i + \lambda_1(E)$.

Posledica (Weyl)

Za $i = 1, \dots, n$ velja $|\lambda_i - \hat{\lambda}_i| \leq \|E\|_2$.

Izrek (Wielandt-Hoffman)

Velja

$$\sum_{i=1}^n (\hat{\lambda}_i - \lambda_i)^2 \leq \|E\|_F^2.$$

Prepletanje lastnih vrednosti

Izrek (Cauchyjev izrek o prepletanju)

Če je A simetrična matrika in je A_r njena vodilna podmatrika velikosti $r \times r$ za $r = 1, \dots, n-1$, potem velja

$$\lambda_{r+1}(A_{r+1}) \leq \lambda_r(A_r) \leq \lambda_r(A_{r+1}) \leq \dots \leq \lambda_2(A_{r+1}) \leq \lambda_1(A_r) \leq \lambda_1(A_{r+1}).$$

Sylvestrov izrek o inerciji

Definicija

Če je X nesingularna, potem sta matriki A in $X^T A X$ **kongruentni**.

Definicija

Inercija simetrične matrike A je trojica (ν, ζ, π) , kjer je ν število negativnih, ζ število ničelnih in π število pozitivnih lastnih vrednosti matrike A .

Sylvestrov izrek o inerciji

Definicija

Če je X nesingularna, potem sta matriki A in $X^T A X$ **kongruentni**.

Definicija

Inercija simetrične matrike A je trojica (ν, ζ, π) , kjer je ν število negativnih, ζ število ničelnih in π število pozitivnih lastnih vrednosti matrike A .

Izrek (Sylvester)

Če je A simetrična matrika, potem ima za vsako nesingularno matriko X matrika $X^T A X$ enako inercijo kot matrika A .

Izrek

Naj bo A simetrična matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1$ in naj bodo $\hat{\lambda}_n \leq \dots \leq \hat{\lambda}_1$ lastne vrednosti matrike $X^T A X$. Potem za $i = 1, \dots, n$ velja

$$|\hat{\lambda}_i - \lambda_i| \leq |\lambda_i| \epsilon,$$

kjer je $\epsilon = \|X^T X - I\|_2$.

Če inverzno iteracijo kombiniramo z Rayleighovim kvocientom, dobimo:

Rayleighova iteracija

izberi $z_0 \neq 0$

$k = 0, 1, \dots$

$$\sigma_k = \rho(z_k, A)$$

$$\text{reši } (A - \sigma_k I)y_{k+1} = z_k$$

$$z_{k+1} = \frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|_2}$$

Namesto fiksnega premika σ pri inverzni iteraciji uporabljamo Rayleighov kvocient, ki je najboljši približek za lastno vrednost danega vektorja.

Lema

Naj bo normiran vektor z_0 približek za lastni vektor x_1 . Če za simetrično matriko A z lastnimi vrednostmi $|\lambda_n| \leq \dots \leq |\lambda_2| < |\lambda_1|$ izvedemo en korak potenčne metode z začetnim vektorjem z_0 , potem velja

$$\|z_1 \pm x_1\|_2 \leq \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \|z_0 - x_1\|_2,$$

kjer predznak $\pm$ izberemo tako, da je norma razlike manjša.

Konvergenca Rayleighove iteracije

Lema

Naj bo normiran vektor z_0 približek za lastni vektor x_1 . Če za simetrično matriko A z lastnimi vrednostmi $|\lambda_n| \leq \dots \leq |\lambda_2| < |\lambda_1|$ izvedemo en korak potenčne metode z začetnim vektorjem z_0 , potem velja

$$\|z_1 \pm x_1\|_2 \leq \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \|z_0 - x_1\|_2,$$

kjer predznak $\pm$ izberemo tako, da je norma razlike manjša.

Posledica

Naj bo A simetrična matrika in $|\lambda_i - \sigma| \ll |\lambda_j - \sigma|$ za $j \neq i, j = 1, \dots, n$. Če izvedemo en korak inverzne iteracije z začetnim vektorjem z_0 , potem velja

$$\|z_1 - x_i\|_2 = \mathcal{O}(|\lambda_i - \sigma| \cdot \|z_0 - x_1\|_2).$$

Lema

Naj bo A simetrična matrika in naj bo normiran vektor z približek za lastni vektor x_k . Potem velja

$$|\lambda_k - \rho(z, A)| \leq 2\|A\|_2 \|z - x_k\|_2^2.$$

Lema

Naj bo A simetrična matrika in naj bo normiran vektor z približek za lastni vektor x_k . Potem velja

$$|\lambda_k - \rho(z, A)| \leq 2\|A\|_2 \|z - x_k\|_2^2.$$

Izrek

Naj bo A simetrična matrika. Potem ima Rayleighova iteracija v bližini enostavne lastne vrednosti kubični red konvergence.

Zgled za kubično konvergenco Rayleighove iteracije

Naj bo $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 > \lambda_2$ in $\mathbf{z}_r = \begin{bmatrix} c_r \\ s_r \end{bmatrix}$, $\|\mathbf{z}_r\|_2^2 = c_r^2 + s_r^2 = 1$. Pri enem koraku Rayleighove iteracije dobimo

$$\sigma_r = \mathbf{z}_r^T A \mathbf{z}_r = c_r^2 \lambda_1 + s_r^2 \lambda_2.$$

Iz sistema

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 - c_r^2 \lambda_1 - s_r^2 \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - c_r^2 \lambda_1 - s_r^2 \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{y}_{r+1} = \mathbf{z}_r$$

dobimo

$$\mathbf{y}_{r+1} = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2) c_r^2 s_r^2} \begin{bmatrix} c_r^3 \\ -s_r^3 \end{bmatrix},$$

od tod pa

$$\mathbf{z}_{r+1} = \frac{1}{\sqrt{c_r^6 + s_r^6}} \begin{bmatrix} c_r^3 \\ -s_r^3 \end{bmatrix}.$$

Od tod v primeru $s_r \neq c_r$ sledi kubična konvergenca proti $\mathbf{e}_1$ oziroma $\mathbf{e}_2$.