

6. Simetrični problem lastnih vrednosti Metoda deli in vladaj

Bor Plestenjak

NLA

30. marec 2010

Pred metodo RRR je bila to najhitrejša metoda za ireducibilne simetrične tridiagonalne matrike velikosti $n \geq 25$.

Ideja metode deli in vladaj v grobem je:

- problem razdelimo na dva manjša podproblema, ki ju rešimo rekurzivno z isto metodo,
- iz rešitev podproblemov izračunamo rešitev originalnega problema.

Naj bo

$$T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & \\ b_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}.$$

Naj bo

$$T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} & \\ & & b_{n-1} & a_n & \end{bmatrix}.$$

Za $m \approx n/2$ razdelimo T kot

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} + \textcolor{red}{b}_m \mathbf{v} \mathbf{v}^T,$$

kjer je

$$T_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & a_{m-1} & b_{m-1} \\ & & b_{m-1} & a_m - \textcolor{red}{b}_m & \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} a_{m+1} - \textcolor{red}{b}_m & b_{m+1} & & & \\ b_{m+1} & a_{m+2} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} & \\ & & b_{n-1} & a_n & \end{bmatrix}$$

in

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_m + \mathbf{e}_{m+1} = [0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0]^T.$$

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} + b_m v v^T$$

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} + b_m v v^T$$

Za simetrični tridiagonalni matriki T_1, T_2 obstajata ortogonalni matriki Q_1, Q_2 in diagonalni matriki D_1, D_2 , da je $T_1 = Q_1 D_1 Q_1^T$ in $T_2 = Q_2 D_2 Q_2^T$.

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} + b_m v v^T$$

Za simetrični tridiagonalni matriki T_1, T_2 obstajata ortogonalni matriki Q_1, Q_2 in diagonalni matriki D_1, D_2 , da je $T_1 = Q_1 D_1 Q_1^T$ in $T_2 = Q_2 D_2 Q_2^T$.

$$T = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} + b_m u u^T \right) \begin{bmatrix} Q_1^T & 0 \\ 0 & Q_2^T \end{bmatrix},$$

kjer je

$$u = \begin{bmatrix} Q_1^T & 0 \\ 0 & Q_2^T \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} Q_1(m, :)^T \\ Q_2(1, :)^T \end{bmatrix}.$$

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} + b_m v v^T$$

Za simetrični tridiagonalni matriki T_1, T_2 obstajata ortogonalni matriki Q_1, Q_2 in diagonalni matriki D_1, D_2 , da je $T_1 = Q_1 D_1 Q_1^T$ in $T_2 = Q_2 D_2 Q_2^T$.

$$T = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} + b_m u u^T \right) \begin{bmatrix} Q_1^T & 0 \\ 0 & Q_2^T \end{bmatrix},$$

kjer je

$$u = \begin{bmatrix} Q_1^T & 0 \\ 0 & Q_2^T \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} Q_1(m, :)^T \\ Q_2(1, :)^T \end{bmatrix}.$$

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} + b_m v v^T$$

Za simetrični tridiagonalni matriki T_1, T_2 obstajata ortogonalni matriki Q_1, Q_2 in diagonalni matriki D_1, D_2 , da je $T_1 = Q_1 D_1 Q_1^T$ in $T_2 = Q_2 D_2 Q_2^T$.

$$T = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} + b_m u u^T \right) \begin{bmatrix} Q_1^T & 0 \\ 0 & Q_2^T \end{bmatrix},$$

kjer je

$$u = \begin{bmatrix} Q_1^T & 0 \\ 0 & Q_2^T \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} Q_1(m, :)^T \\ Q_2(1, :)^T \end{bmatrix}.$$

Če diagonaliziramo $D + b_m u u^T = Q' \Lambda Q'^T$, kjer je $D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}$, potem je

$$T = Q \Lambda Q^T \text{ za } Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} Q'.$$

Algoritem v grobem

Začetni podatek je ireducibilna tridiagonalna simetrična matrika T . Algoritem vrne diagonalno matriko Λ in ortogonalno matriko Q da je $T = Q\Lambda Q^T$.

Osnovna varianta metode deli in vladaj

$[Q, \Lambda] = \text{deli_in_vladaj}(T)$

če je T velikosti 1×1 , potem vrni $Q = 1$, $\Lambda = T$
sicer

$$\text{razdeli } T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} + b_m vv^T$$

$[Q_1, D_1] = \text{deli_in_vladaj}(T_1)$

$[Q_2, D_2] = \text{deli_in_vladaj}(T_2)$

iz Q_1, Q_2, D_1, D_2 izračunaj $D + b_m uu^T$

izračunaj lastne vrednosti Λ in vektorje Q' za $D + b_m uu^T$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} Q'$$

Reševanje lastnega problema za $D + \rho uu^T$

Najprej uredimo diagonalne elemente D tako, da je $d_n \leq d_{n-1} \leq \dots \leq d_1$. Seveda ustrezno preuredimo tudi elemente vektorja u .

Lema (o razpadanju)

Naj bo $A = D + \rho uu^T$, kjer je $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, $d_n \leq d_{n-1} \leq \dots \leq d_1$ in $u = [u_1 \ \dots \ u_n]^T$.

- a) Če je $d_i = d_{i+1}$ je d_i lastna vrednost matrike A , lastni vektor pa je $u_i e_{i+1} - u_{i+1} e_i = [0 \ \dots \ 0 \ -u_{i+1} \ u_i \ 0 \ \dots \ 0]^T$.
- b) Če je $u_i = 0$ je d_i lastna vrednost matrike A , lastni vektor pa je e_i .

Reševanje lastnega problema za $D + \rho uu^T$

Najprej uredimo diagonalne elemente D tako, da je $d_n \leq d_{n-1} \leq \dots \leq d_1$. Seveda ustrezno preuredimo tudi elemente vektorja u .

Lema (o razpadanju)

Naj bo $A = D + \rho uu^T$, kjer je $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, $d_n \leq d_{n-1} \leq \dots \leq d_1$ in $u = [u_1 \ \dots \ u_n]^T$.

- a) Če je $d_i = d_{i+1}$ je d_i lastna vrednost matrike A , lastni vektor pa je $u_i e_{i+1} - u_{i+1} e_i = [0 \ \dots \ 0 \ -u_{i+1} \ u_i \ 0 \ \dots \ 0]^T$.
- b) Če je $u_i = 0$ je d_i lastna vrednost matrike A , lastni vektor pa je e_i .

Hitro lahko ugotovimo, da več kot dva d_i ne moreta biti enaka.

Ko izločimo lastne vrednosti iz zgornje leme, lahko v nadaljevanju predpostavimo, da so vsi d_i različni in da je $u_i \neq 0$ za $i = 1, \dots, n$.

Lema

Za $x, y \in \mathbb{R}^n$ velja $\det(I + xy^T) = 1 + y^T x$.

Lema

Za $x, y \in \mathbb{R}^n$ velja $\det(I + xy^T) = 1 + y^T x$.

Trditev

Naj bo $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, $d_n < d_{n-1} < \dots < d_1$ in $u = [u_1 \ \dots \ u_n]^T$, $u_i \neq 0$ za $i = 1, \dots, n$. Lastne vrednosti $D + \rho uu^T$ so rešitve **sekularne enačbe** $f(\lambda) = 0$, kjer je

$$f(\lambda) = 1 + \rho \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{d_i - \lambda}.$$

Lema

Za $x, y \in \mathbb{R}^n$ velja $\det(I + xy^T) = 1 + y^T x$.

Trditev

Naj bo $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, $d_n < d_{n-1} < \dots < d_1$ in $u = [u_1 \ \dots \ u_n]^T$, $u_i \neq 0$ za $i = 1, \dots, n$. Lastne vrednosti $D + \rho uu^T$ so rešitve **sekularne enačbe** $f(\lambda) = 0$, kjer je

$$f(\lambda) = 1 + \rho \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{d_i - \lambda}.$$

Ko enkrat izračunamo lastne vrednosti, pridemo do lastnih vektorjev zelo poceni.

Lema

Če je α lastna vrednost $D + \rho uu^T$, je $(D - \alpha I)^{-1}u$ ustrezeni lastni vektor.

Imamo $d_n < d_{n-1} < \dots < d_1$, $u_i \neq 0$ za $i = 1, \dots, n$ in

$$f(\lambda) = 1 + \rho \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{d_i - \lambda}.$$

Imamo $d_n < d_{n-1} < \dots < d_1$, $u_i \neq 0$ za $i = 1, \dots, n$ in

$$f(\lambda) = 1 + \rho \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{d_i - \lambda}.$$

Očitno ima f pole pri $d_1, \dots, d_n$, asimptota pri $\lambda = \pm\infty$ pa je 1.

$$f'(\lambda) = \rho \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{(d_i - \lambda)^2}.$$

Sekularna enačba ima ničle $\alpha_n < \alpha_{n-1} < \dots < \alpha_1$, za katere velja

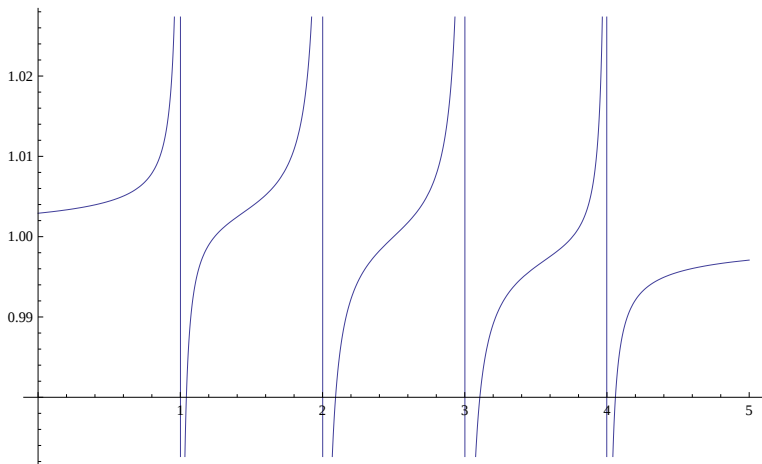
- $\rho > 0$: $d_n < \alpha_n < \dots < d_1 < \alpha_1$,
- $\rho < 0$: $\alpha_n < d_n < \dots < \alpha_1 < d_1$.

Zgled sekularne enačbe

$$f(\lambda) = 1 + 0.01 \left(\frac{1}{1-\lambda} + \frac{2}{2-\lambda} + \frac{2}{3-\lambda} + \frac{1}{4-\lambda} \right)$$

Zgled sekularne enačbe

$$f(\lambda) = 1 + 0.01 \left(\frac{1}{1-\lambda} + \frac{2}{2-\lambda} + \frac{2}{3-\lambda} + \frac{1}{4-\lambda} \right)$$



Podrobno reševanje sekularne enačbe

Denimo, da iščemo rešitev na (d_{i+1}, d_i) , začetni približek je x_r .

Podrobno reševanje sekularne enačbe

Denimo, da iščemo rešitev na (d_{i+1}, d_i) , začetni približek je x_r . Skonstruiramo racionalno funkcijo oblike

$$h(\lambda) = \frac{c_1}{d_i - \lambda} + \frac{c_2}{d_{i+1} - \lambda} + c_3,$$

da bo $h(x_r) = f(x_r)$ in $f'(x_r) = h'(x_r)$.

Podrobno reševanje sekularne enačbe

Denimo, da iščemo rešitev na (d_{i+1}, d_i) , začetni približek je x_r . Skonstruiramo racionalno funkcijo oblike

$$h(\lambda) = \frac{c_1}{d_i - \lambda} + \frac{c_2}{d_{i+1} - \lambda} + c_3,$$

da bo $h(x_r) = f(x_r)$ in $f'(x_r) = h'(x_r)$. Zaradi stabilnosti razdelimo f na

$$f(\lambda) = 1 + \rho \sum_{k=1}^i \frac{u_k^2}{d_k - \lambda} + \rho \sum_{k=i+1}^n \frac{u_k^2}{d_k - \lambda} =: 1 + \psi_1(\lambda) + \psi_2(\lambda).$$

Podrobno reševanje sekularne enačbe

Denimo, da iščemo rešitev na (d_{i+1}, d_i) , začetni približek je x_r . Skonstruiramo racionalno funkcijo oblike

$$h(\lambda) = \frac{c_1}{d_i - \lambda} + \frac{c_2}{d_{i+1} - \lambda} + c_3,$$

da bo $h(x_r) = f(x_r)$ in $f'(x_r) = h'(x_r)$. Zaradi stabilnosti razdelimo f na

$$f(\lambda) = 1 + \rho \sum_{k=1}^i \frac{u_k^2}{d_k - \lambda} + \rho \sum_{k=i+1}^n \frac{u_k^2}{d_k - \lambda} =: 1 + \psi_1(\lambda) + \psi_2(\lambda).$$

Sedaj določimo c_1, c'_1 in c_2, c'_2 tako, da za

$$h_1(\lambda) = \frac{c_1}{d_i - \lambda} + c'_1 \quad \text{in} \quad h_2(\lambda) = \frac{c_2}{d_{i+1} - \lambda} + c'_2$$

velja

$$h_1(x_r) = \psi_1(x_r), \quad h'_1(x_r) = \psi'_1(x_r) \quad \text{in} \quad h_2(x_r) = \psi_2(x_r), \quad h'_2(x_r) = \psi'_2(x_r).$$

Podrobno reševanje sekularne enačbe

Denimo, da iščemo rešitev na (d_{i+1}, d_i) , začetni približek je x_r . Skonstruiramo racionalno funkcijo oblike

$$h(\lambda) = \frac{c_1}{d_i - \lambda} + \frac{c_2}{d_{i+1} - \lambda} + c_3,$$

da bo $h(x_r) = f(x_r)$ in $f'(x_r) = h'(x_r)$. Zaradi stabilnosti razdelimo f na

$$f(\lambda) = 1 + \rho \sum_{k=1}^i \frac{u_k^2}{d_k - \lambda} + \rho \sum_{k=i+1}^n \frac{u_k^2}{d_k - \lambda} =: 1 + \psi_1(\lambda) + \psi_2(\lambda).$$

Sedaj določimo c_1, c'_1 in c_2, c'_2 tako, da za

$$h_1(\lambda) = \frac{c_1}{d_i - \lambda} + c'_1 \quad \text{in} \quad h_2(\lambda) = \frac{c_2}{d_{i+1} - \lambda} + c'_2$$

velja

$$h_1(x_r) = \psi_1(x_r), \quad h'_1(x_r) = \psi'_1(x_r) \quad \text{in} \quad h_2(x_r) = \psi_2(x_r), \quad h'_2(x_r) = \psi'_2(x_r).$$

Iskana racionalna funkcija je $h(\lambda) = 1 + h_1(\lambda) + h_2(\lambda)$.

Podrobno reševanje sekularne enačbe

Denimo, da iščemo rešitev na (d_{i+1}, d_i) , začetni približek je x_r . Skonstruiramo racionalno funkcijo oblike

$$h(\lambda) = \frac{c_1}{d_i - \lambda} + \frac{c_2}{d_{i+1} - \lambda} + c_3,$$

da bo $h(x_r) = f(x_r)$ in $f'(x_r) = h'(x_r)$. Zaradi stabilnosti razdelimo f na

$$f(\lambda) = 1 + \rho \sum_{k=1}^i \frac{u_k^2}{d_k - \lambda} + \rho \sum_{k=i+1}^n \frac{u_k^2}{d_k - \lambda} =: 1 + \psi_1(\lambda) + \psi_2(\lambda).$$

Sedaj določimo c_1, c'_1 in c_2, c'_2 tako, da za

$$h_1(\lambda) = \frac{c_1}{d_i - \lambda} + c'_1 \quad \text{in} \quad h_2(\lambda) = \frac{c_2}{d_{i+1} - \lambda} + c'_2$$

velja

$$h_1(x_r) = \psi_1(x_r), \quad h'_1(x_r) = \psi'_1(x_r) \quad \text{in} \quad h_2(x_r) = \psi_2(x_r), \quad h'_2(x_r) = \psi'_2(x_r).$$

Iskana racionalna funkcija je $h(\lambda) = 1 + h_1(\lambda) + h_2(\lambda)$. Enačba $h(\lambda) = 0$ ima dve rešitvi, za x_{r+1} pa vzamemo tisto, ki leži znotraj (d_{i+1}, d_i) .

Izkaže se, da so lastni vektorji, ki jih izračunamo po formuli $(D - \alpha I)^{-1}u$ bolj slabo ortogonalni, zato je potrebno algoritem popraviti. Pri popravku vektor u nadomestimo z vektorjem $\hat{u}$ iz Löwnerjevega izreka.

Izrek (Löwner)

Naj bo $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, $d_n < d_{n-1} < \dots < d_1$ in naj bodo $\alpha_n < \alpha_{n-1} < \dots < \alpha_1$ dana števila, ki se prepletajo s števili d_i :

$$d_n < \alpha_n < \dots < d_1 < \alpha_1.$$

Potem za vektor $\hat{u}$, podan z

$$|\hat{u}_i| = \left(\frac{\prod_{j=1}^n (\alpha_j - d_i)}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (d_j - d_i)} \right)^{1/2}$$

velja, da so α_i *točne lastne vrednosti matrike* $\hat{D} = D + \hat{u}\hat{u}^T$.

Stabilno računanje lastnih vektorjev

Stabilno računanje lastnih vektorjev $D + uu^T$

Iz sekularne enačbe izračunaj lastne vrednosti α_i matrike $D + uu^T$

Po Löwnerjevem izreku izračunaj $\hat{u}$, da so α_i točne lastne vrednosti $D + \hat{u}\hat{u}^T$

Za lastne vektorje vzemi $(D - \alpha_i I)^{-1}\hat{u}$.

Stabilno računanje lastnih vektorjev

Stabilno računanje lastnih vektorjev $D + uu^T$

Iz sekularne enačbe izračunaj lastne vrednosti α_i matrike $D + uu^T$

Po Löwnerjevem izreku izračunaj $\hat{u}$, da so α_i točne lastne vrednosti $D + \hat{u}\hat{u}^T$

Za lastne vektorje vzemi $(D - \alpha_i I)^{-1}\hat{u}$.

Pokazati je možno, da velja

$$\|uu^T - \hat{u}\hat{u}^T\|_2 \leq \mathcal{O}(u)(\|D\|_2 + \|uu^T\|_2).$$

Izračun $\hat{u}_i$ je direktno stabilen, relativna napaka je omejena s $(4n - 2)u$.

Naj bo $T(n)$ število operacij, ki jih porabi algoritem za matriko velikosti n .
Potem velja

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) && \text{(rekurzivni klic dveh podproblemov)} \\ &+ \mathcal{O}(n^2) && \text{(izračun lastnih vrednosti } D + \rho uu^T) \\ &+ \mathcal{O}(n^2) && \text{(izračun lastnih vektorjev } D + \rho uu^T) \\ &+ cn^3 && \text{(izračun produkta za matriko } Q) \end{aligned}$$

Naj bo $T(n)$ število operacij, ki jih porabi algoritem za matriko velikosti n .
Potem velja

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) && \text{(rekurzivni klic dveh podproblemov)} \\ &+ \mathcal{O}(n^2) && \text{(izračun lastnih vrednosti } D + \rho uu^T) \\ &+ \mathcal{O}(n^2) && \text{(izračun lastnih vektorjev } D + \rho uu^T) \\ &+ cn^3 && \text{(izračun produkta za matriko } Q) \end{aligned}$$

Od tod sledi $T(n) = (4/3)cn^3$

Naj bo $T(n)$ število operacij, ki jih porabi algoritem za matriko velikosti n .
Potem velja

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) && \text{(rekurzivni klic dveh podproblemov)} \\ &+ \mathcal{O}(n^2) && \text{(izračun lastnih vrednosti } D + \rho uu^T) \\ &+ \mathcal{O}(n^2) && \text{(izračun lastnih vektorjev } D + \rho uu^T) \\ &+ cn^3 && \text{(izračun produkta za matriko } Q) \end{aligned}$$

Od tod sledi $T(n) = (4/3)cn^3$

Konstanta c je v najslabšem primeru enaka 1, v praksi pa je zaradi razpadanja lahko precej manjša, posebno če so matrike večje.

Naj bo $T(n)$ število operacij, ki jih porabi algoritem za matriko velikosti n .
Potem velja

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) && \text{(rekurzivni klic dveh podproblemov)} \\ &+ \mathcal{O}(n^2) && \text{(izračun lastnih vrednosti } D + \rho uu^T) \\ &+ \mathcal{O}(n^2) && \text{(izračun lastnih vektorjev } D + \rho uu^T) \\ &+ cn^3 && \text{(izračun produkta za matriko } Q) \end{aligned}$$

Od tod sledi $T(n) = (4/3)cn^3$

Konstanta c je v najslabšem primeru enaka 1, v praksi pa je zaradi razpadanja lahko precej manjša, posebno če so matrike večje.

Ko je velikost matrike dovolj majhna ($n < 25$), namesto delitve raje uporabimo QR algoritem.

Deli in vladaj je ponavadi nekajkrat hitrejši od QR, a potrebuje tudi več spomina.

- Osnovno metodo je objavil Cuppen leta 1981.

- Osnovno metodo je objavil Cuppen leta 1981.
- Stabilno varianto z Löwnerjevim izrekom sta predstavila Gu in Eisenstat leta 1992.

- Osnovno metodo je objavil Cuppen leta 1981.
- Stabilno varianto z Löwnerjevim izrekom sta predstavila Gu in Eisenstat leta 1992.
- Do odkritja metode RRR je bil to najučinkovitejši algoritem za simetrično matriko, če potrebujemo poleg lastnih vrednosti tudi lastne vektorje.

- Osnovno metodo je objavil Cuppen leta 1981.
- Stabilno varianto z Löwnerjevim izrekom sta predstavila Gu in Eisenstat leta 1992.
- Do odkritja metode RRR je bil to najučinkovitejši algoritem za simetrično matriko, če potrebujemo poleg lastnih vrednosti tudi lastne vektorje.
- Leta 1995 sta Gu in Eisenstat predstavila varianto, ki preko hitre multipolne metode zmanjša časovno zahtevnost metode za velike n na $\mathcal{O}(n \cdot \log^p n)$ za samo lastne vrednosti oziroma $\mathcal{O}(n^2)$ za lastne vektorje.

- Osnovno metodo je objavil Cuppen leta 1981.
- Stabilno varianto z Löwnerjevim izrekom sta predstavila Gu in Eisenstat leta 1992.
- Do odkritja metode RRR je bil to najučinkovitejši algoritem za simetrično matriko, če potrebujemo poleg lastnih vrednosti tudi lastne vektorje.
- Leta 1995 sta Gu in Eisenstat predstavila varianto, ki preko hitre multipolne metode zmanjša časovno zahtevnost metode za velike n na $\mathcal{O}(n \cdot \log^p n)$ za samo lastne vrednosti oziroma $\mathcal{O}(n^2)$ za lastne vektorje.
- Metodo so posplošili za računanje singularnega razcepa (Gu in Eisenstat 1995).