

Primeri uporabe lastnih vrednosti in lastnih vektorjev

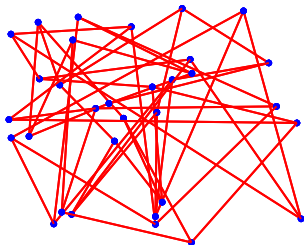
Bor Plestenjak

NLA

21. maj 2015

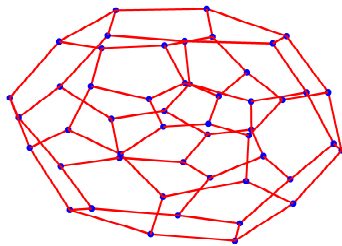
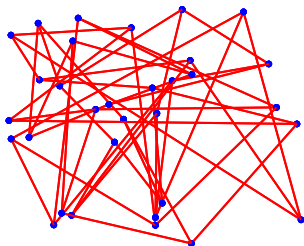
Lepo risanje grafov

Denimo, da imamo graf fullerena, a poznamo le matriko sosednosti. Če za koordinate vozlišč izberemo naključne vrednosti, se iz slike ne da nič razbrati.



Lepo risanje grafov

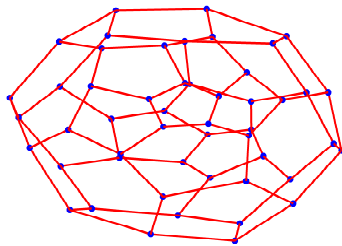
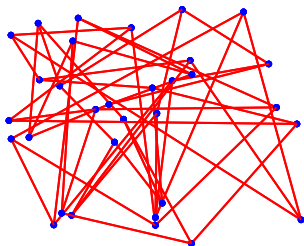
Denimo, da imamo graf fullerena, a poznamo le matriko sosednosti. Če za koordinate vozlišč izberemo naključne vrednosti, se iz slike ne da nič razbrati.



Če koordinate izberemo drugače, je iz slike razvidno, da gre za kubičen polieder. Kako pridemo do lepe slike?

Lepo risanje grafov

Denimo, da imamo graf fullerena, a poznamo le matriko sosednosti. Če za koordinate vozlišč izberemo naključne vrednosti, se iz slike ne da nič razbrati.



Če koordinate izberemo drugače, je iz slike razvidno, da gre za kubičen polieder. Kako pridemo do lepe slike?

Eden izmed algoritmov za lepo risanje kubičnih poliedrskih grafov (graf predstavlja oglišča in stranice nekega poliedra, kjer se v vsakem oglišču srečajo tri stranice), uporablja lastne vektorje ustreznih lastnih vrednosti.

Lepo risanje grafov 2

Grafu G na n točkah ustreza matrika sosednosti A velikosti $n \times n$, ki ima na (i, j) -tem mestu 1, če sta točki i in j povezani in sicer 0.

Če je G neusmerjen, je $A = A^T$.

Če je G kubičen graf (vsaka točka ima natanko tri sosede), potem je očitno ena lastna vrednost (ki je ravno največja) ravno 3, z lastnim vektorjem $[1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$.

Sedaj izberemo λ_2 , λ_3 in λ_4 ter normirane lastne vektorje, ki naj bodo po vrsti x , y , z . Če sedaj za koordinate i -te točke vzamemo kar $T_i = (x_i, y_i, z_i)$, dobimo lepo tridimenzionalno sliko grafa.

Gaussove kvadraturene formule

Računanje uteži in vozlov za Gaussovo kvadraturno formulo lahko prevedemo na iskanje lastnih vrednosti in lastnih vektorjev tridiagonalne matrike. Pokazati se da, da ortonormirani polinomi zadoščajo tričlenski rekurzivni formuli

$$xp_k(x) = b_{k-1}p_{k-1}(x) + a_k p_k(x) + b_k p_{k+1}(x).$$

Gaussove kvadrature formule

Računanje uteži in vozlov za Gaussovo kvadraturno formulo lahko prevedemo na iskanje lastnih vrednosti in lastnih vektorjev tridiagonalne matrike. Pokazati se da, da ortonormirani polinomi zadoščajo tričlenski rekurzivni formuli

$$xp_k(x) = b_{k-1}p_{k-1}(x) + a_k p_k(x) + b_k p_{k+1}(x).$$

Če poznamo koeficiente a_k in b_k , potem so **vozli** $x_0, \dots, x_n$ **lastne vrednosti** tridiagonalne matrike

$$T_n = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & & & \\ b_0 & a_1 & b_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}.$$

Gaussove kvadrature formule

Računanje uteži in vozlov za Gaussovo kvadraturno formulo lahko prevedemo na iskanje lastnih vrednosti in lastnih vektorjev tridiagonalne matrike. Pokazati se da, da ortonormirani polinomi zadoščajo tričlenski rekurzivni formuli

$$xp_k(x) = b_{k-1}p_{k-1}(x) + a_k p_k(x) + b_k p_{k+1}(x).$$

Če poznamo koeficiente a_k in b_k , potem so **vozli** $x_0, \dots, x_n$ **lastne vrednosti** tridiagonalne matrike

$$T_n = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & & & \\ b_0 & a_1 & b_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}.$$

Uteži dobimo iz **prvih komponent** ortonormiranih **lastnih vektorjev**:

$$a_i = x_{1i}^2 \int_a^b \rho(x) dx,$$

kjer je X matrika ortonormiranih lastnih vektorjev matrike T_n .

Sistem vzmeti in nihal brez dušenja

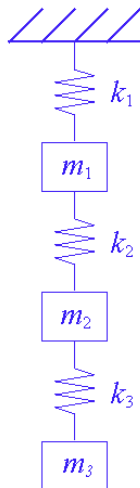
Denimo, da imamo sistem treh uteži in treh vzmeti. Po Newtonovih zakonih za odmike uteži y_i velja sistem diferencialnih enačb

$$My'' + Ky = 0,$$

kjer sta

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix},$$

M je masna matrika, K pa togostna matrika.



Sistem vzmeti in nihal brez dušenja

Denimo, da imamo sistem treh uteži in treh vzmeti. Po Newtonovih zakonih za odmike uteži y_i velja sistem diferencialnih enačb

$$My'' + Ky = 0,$$

kjer sta

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix},$$

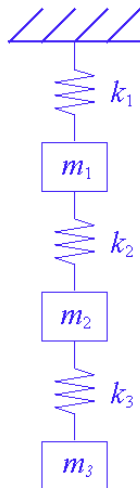
M je **masna matrika**, K pa **togostna matrika**. Sistem niha z lastno frekvenco ω , kar pomeni, da za komponente rešitve velja

$$y_k(t) = x_k e^{i\omega t},$$

kjer so x_1, x_2, x_3 amplitude. Lastno frekvenco in amplitude določimo iz

$$Kx = \omega^2 Mx,$$

saj mora veljati $y_k''(t) = -\omega^2 x_k e^{i\omega t}$.



Sistem vzmeti in nihal brez dušenja

Denimo, da imamo sistem treh uteži in treh vzmeti. Po Newtonovih zakonih za odmike uteži y_i velja sistem diferencialnih enačb

$$My'' + Ky = 0,$$

kjer sta

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix},$$

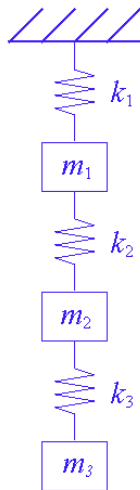
M je **masna matrika**, K pa **togostna matrika**. Sistem niha z lastno frekvenco ω , kar pomeni, da za komponente rešitve velja

$$y_k(t) = x_k e^{i\omega t},$$

kjer so x_1, x_2, x_3 amplitude. Lastno frekvenco in amplitude določimo iz

$$Kx = \omega^2 Mx,$$

saj mora veljati $y_k''(t) = -\omega^2 x_k e^{i\omega t}$. To prevedemo na lastni problem $Az = \lambda z$, kjer je $A = M^{-1/2} K M^{-1/2}$, $\lambda = \omega^2$ in $z = M^{1/2} x$.



Sturm-Liouvillov robni problem lastnih vrednosti

Na intervalu $[a, b]$ iščemo lastno vrednost λ in neničelno funkcijo y , ki zadošča

$$-(p(x)y')' + q(x)y = \lambda y,$$

in robnima pogoje $y(a) = y(b) = 0$, pri čemer za koeficienta p in q velja $p(x) > 0$ in $q(x) \geq 0$ za $x \in [a, b]$.

Sturm-Liouvillov robni problem lastnih vrednosti

Na intervalu $[a, b]$ iščemo lastno vrednost λ in neničelno funkcijo y , ki zadošča

$$-(p(x)y')' + q(x)y = \lambda y,$$

in robnima pogoje $y(a) = y(b) = 0$, pri čemer za koeficienta p in q velja $p(x) > 0$ in $q(x) \geq 0$ za $x \in [a, b]$.

Pri diferenčni metodi interval $[a, b]$ razdelimo z ekvidistantnimi točkami $x_0 = a$, $x_i = x_0 + ih$, kjer je $h = (b - a)/(n + 1)$. Naj bo y_i približek za $y(x_i)$, ki ga iščemo.

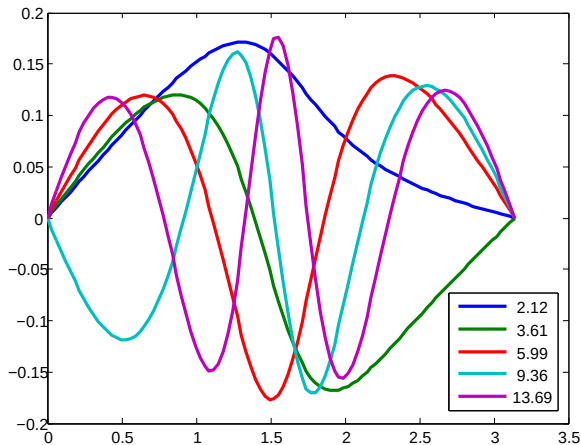
Enačbo v točki x_i , $i = 1, \dots, n$, aproksimiramo z

$$\frac{p(x_i - h/2)(y_i - y_{i-1}) + p(x_i + h/2)(y_i - y_{i+1})}{h^2} + q(x_i)y_i = \lambda y_i.$$

Dobimo $Ay = \lambda y$, kjer je A tridiagonalna simetrična matrika.

Zgled robnega problema

$[a, b] = [0, \pi]$, $p(x) = 1 - \frac{4}{5} \sin^2 x$, $q(x) = x$ in robna pogoja $y(a) = y(b) = 0$.



Lastna nihanja konstrukcij

Pri mehaničnih strukturah nas zanima, kako se obnašajo glede na vsiljeno nihanje. Če so lastne frekvence blizu vsiljenim, lahko pride do resonance in velikih poškodb.

Tako npr. zgradbe ne smejo imeti lastnih frekvenc v območju frekvenc potresov.

Brez dušenja dobimo posplošen problem lastnih vrednosti, v primeru dušenja, ki je odvisno od hitrosti, pa kvadratični problem lastnih vrednosti.

Če je model utež, ki visi na vzmeti z dolžino l , potem nastopajo naslednje sile:

- sila težnosti mg navzdol,
- sila vzmeti $-k(l + y)$, kjer je y odmik iz ravnovesne lege,
- sila dušenja $-c \frac{dy}{dt}$,
- zunanja sila $F(t)$.

Iz Newtonovega zakona dobimo

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - k(l + y) - c \frac{dy}{dt} + F(t).$$

V ravnovesni legi pri $F(t) \equiv 0$ in $y \equiv 0$ velja $mg = kl$ in dobimo

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = F(t).$$

Vrste dušenja

$$\text{Imamo } m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = F(t).$$

Prosto nihanje je, če ni dušenja in zunanjih sil. Ostane $m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = 0$, rešitev je

$$y(t) = R \cos \left(\frac{k}{m} t - \phi \right).$$

Dušeno prosto nihanje je, če ni zunanjih sil. Ostane $m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = 0$. Velja:

- $c^2 - 4km > 0$: **nadkritično dušeno nihanje** ($r_1, r_2 < 0$)

$$y(t) = ae^{r_1 t} + be^{r_2 t}.$$

- $c^2 - 4km = 0$: **kritično dušeno nihanje**

$$y(t) = (a + bt)e^{-ct/2m}.$$

- $c^2 - 4km < 0$: **poddušeno nihanje** $\mu = \frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}$,

$$y(t) = e^{-ct/2m} (a \cos(\mu t) + b \sin(\mu t)).$$

Vsiljeno nihanje

Imamo $m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = F(t)$. Če $F(t) \neq 0$, dobimo še partikularno rešitev.

Ponavadi je $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$, partikularna rešitev je

$$y_p(t) = \frac{F_0 \cos(\omega t - \delta)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}},$$

kjer je

$$\tan(\delta) = \frac{c\omega}{k - m\omega^2}.$$

V posebnem primeru, ko ni dušenja, dobimo

$$y(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t).$$

Do resonance pride, ko sistem začne nihati z vsiljeno frekvenco z zelo veliko amplitudo. Pojavi se, če ni dušenja ali pa, če je dušenje majhno in je vsiljena frekvenca blizu lastni.

Pri sistemu več mas in vzmeti dobimo $M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = F$. Sedaj moramo opazovati vse lastne frekvence.

Vsiljeno nihanje in QEP

Imamo enačbo

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = f(t).$$

Če je desna stran oblike $f(t) = e^{i\omega_0 t} f_0$, kar ustreza vsiljenemu nihanju, potem je partikularna rešitev

$$q_p(t) = e^{i\omega_0 t} \sum_{k=1}^{2n} \frac{y_k^H f_0}{i\omega_0 - \lambda_k} x_k,$$

kjer so $y_1, \dots, y_{2n}$ levi lastni vektorji.

Vsiljeno nihanje in QEP

Imamo enačbo

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = f(t).$$

Če je desna stran oblike $f(t) = e^{i\omega_0 t} f_0$, kar ustreza vsiljenemu nihanju, potem je partikularna rešitev

$$q_p(t) = e^{i\omega_0 t} \sum_{k=1}^{2n} \frac{y_k^H f_0}{i\omega_0 - \lambda_k} x_k,$$

kjer so $y_1, \dots, y_{2n}$ levi lastni vektorji.

Če se $i\omega_0$ približa eni izmed lastnih vrednosti λ_k , se lahko pojavi **rezonanca**.

Vsiljeno nihanje in QEP

Imamo enačbo

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = f(t).$$

Če je desna stran oblike $f(t) = e^{i\omega_0 t} f_0$, kar ustreza vsiljenemu nihanju, potem je partikularna rešitev

$$q_p(t) = e^{i\omega_0 t} \sum_{k=1}^{2n} \frac{y_k^H f_0}{i\omega_0 - \lambda_k} x_k,$$

kjer so $y_1, \dots, y_{2n}$ levi lastni vektorji.

Če se $i\omega_0$ približa eni izmed lastnih vrednosti λ_k , se lahko pojavi **rezonanca**.

Leta 1831 se je v Angliji podrl most blizu Manchesterja, ko so čez strumno korakali vojaki.

Vsiljeno nihanje in QEP

Imamo enačbo

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = f(t).$$

Če je desna stran oblike $f(t) = e^{i\omega_0 t} f_0$, kar ustreza vsiljenemu nihanju, potem je partikularna rešitev

$$q_p(t) = e^{i\omega_0 t} \sum_{k=1}^{2n} \frac{y_k^H f_0}{i\omega_0 - \lambda_k} x_k,$$

kjer so $y_1, \dots, y_{2n}$ levi lastni vektorji.

Če se $i\omega_0$ približa eni izmed lastnih vrednosti λ_k , se lahko pojavi **rezonanca**.

Leta 1831 se je v Angliji podrl most blizu Manchesterja, ko so čez strumno korakali vojaki.

Znan je tudi primer visečega mosta Tacoma Narrows iz ZDA, ki so ga leta 1940 porušili sunki vetra.

Lastna nihanja dvodimenzionalnih bobnov

Imamo opno na območju $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s fiksnim robom. Lastne frekvence in funkcije dobimo iz enačbe

$$\Delta u = \omega^2 u,$$

kjer je na robu pogoj $u|_{\partial\Omega} = 0$ (fiksni rob).

Lastna nihanja dvodimenzionalnih bobnov

Imamo opno na območju $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s fiksnim robom. Lastne frekvence in funkcije dobimo iz enačbe

$$\Delta u = \omega^2 u,$$

kjer je na robu pogoj $u|_{\partial\Omega} = 0$ (fiksni rob).

Numerično to lahko rešimo na več načinov, npr:

- V primeru lepega območja lahko uporabimo metodo separacije spremenljivk. Deluje za okroglo in pravokotno opno, medtem ko pri eliptični opni dobimo dvoparametrični problem lastnih vrednosti. Za poljubno območje metode ne moremo uporabiti.
- Diferenčna metoda: območje prekrijemo s čim bolj fino mrežo in iščemo vrednosti v točkah te mreže.
- Metoda končnih elementov: območje aproksimiramo s triangulacijo in za rešitev iščemo kosoma linearno funkcijo nad triangulacijo.

Lastna nihanja dvodimenzionalnih bobnov

Imamo opno na območju $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s fiksnim robom. Lastne frekvence in funkcije dobimo iz enačbe

$$\Delta u = \omega^2 u,$$

kjer je na robu pogoj $u|_{\partial\Omega} = 0$ (fiksni rob).

Numerično to lahko rešimo na več načinov, npr:

- V primeru lepega območja lahko uporabimo metodo separacije spremenljivk. Deluje za okroglo in pravokotno opno, medtem ko pri eliptični opni dobimo dvoparametrični problem lastnih vrednosti. Za poljubno območje metode ne moremo uporabiti.
- Diferenčna metoda: območje prekrijemo s čim bolj fino mrežo in iščemo vrednosti v točkah te mreže.
- Metoda končnih elementov: območje aproksimiramo s triangulacijo in za rešitev iščemo kosoma linearno funkcijo nad triangulacijo.

V zadnjih dveh primerih moramo rešiti problem lastnih vrednosti za matriko A , ki je ponavadi velika in razpršena. Lastne vrednosti A so približki za prave lastne frekvence, nekatere boljši, nekateri približki pa so lahko povsem napačni.

Lastna nihanja dvodimenzionalnih bobnov

Kac je leta 1966 napisal članek "Can you hear the shape of a drum?"

Lastna nihanja dvodimenzionalnih bobnov

Kac je leta 1966 napisal članek "Can you hear the shape of a drum?"

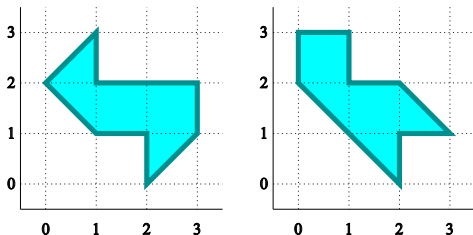
Zanimalo ga je, ali lahko obstajata dva različna bobna (opni), ki imata povsem enake lastne frekvence.

Lastna nihanja dvodimenzionalnih bobnov

Kac je leta 1966 napisal članek "Can you hear the shape of a drum?"

Zanimalo ga je, ali lahko obstajata dva različna bobna (opni), ki imata povsem enake lastne frekvence.

Odgovor so našli Gordon, Web in Wolpert leta 1992, ko so skonstruirali različni izospektralni opni:



Električno omrežje

V enostavnem električnem krogu nastopajo naslednji elementi: vir, upornik, kondenzator in tuljava.

V zaprtem krogu je vsota padcev napetosti enaka vhodni napetosti na viru $E(t)$. Za spremembo napetosti vemo:

- preko upornika je RI , kjer je R upornost in I tok,
- preko tuljave je $L\dot{I}$, kjer je L induktivnost,
- preko kondenzatorja je Q/C , kjer je C kapacitivnost in Q električni naboj, $\dot{Q} = I$.

Dobimo enačbo

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + Q/C = E(t).$$

ki spominja na enačbo za mehanični sistem. Pri velikem omrežju dobimo QEP .

Električno omrežje

V enostavnem električnem krogu nastopajo naslednji elementi: vir, upornik, kondenzator in tuljava.

V zaprtem krogu je vsota padcev napetosti enaka vhodni napetosti na viru $E(t)$. Za spremembo napetosti vemo:

- preko upornika je RI , kjer je R upornost in I tok,
- preko tuljave je $L\dot{I}$, kjer je L induktivnost,
- preko kondenzatorja je Q/C , kjer je C kapacitivnost in Q električni naboj, $\dot{Q} = I$.

Dobimo enačbo

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + Q/C = E(t).$$

ki spominja na enačbo za mehanični sistem. Pri velikem omrežju dobimo QEP .

Sedaj je v nekaterih primerih resonanca zaželenja (radijske postaje). Ko se v omrežju pojavijo nestabilnosti zaradi majhnih motenj, mora biti omrežje tako, da se motnje ne povečujejo. Tako kot prej mora za lastne vrednosti veljati, da nimajo pozitivnega realnega dela.

Linearni zvezni časovno nespremenljivi kontrolni sistem lahko opišemo z enačbama

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (2)$$

kjer so $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrika stanja, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ vhodna matrika, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ izhodna matrika, $D \in \mathbb{R}^{r \times m}$ matrika direktnega prenosa, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ vhodni signal in $y(t) \in \mathbb{R}^r$ izhodni signal. Ponavadi je $m \leq n$ in $r \leq n$. Enačbi (1) pravimo enačba stanja in (2) je izhodna enačba.

Stanje x_0 in vhod na časovnem intervalu (t_0, t) določata izhod za $t \geq t_0$.

Linearni zvezni časovno nespremenljivi kontrolni sistem lahko opišemo z enačbama

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (2)$$

kjer so $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrika stanja, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ vhodna matrika, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ izhodna matrika, $D \in \mathbb{R}^{r \times m}$ matrika direktnega prenosa, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ vhodni signal in $y(t) \in \mathbb{R}^r$ izhodni signal. Ponavadi je $m \leq n$ in $r \leq n$. Enačbi (1) pravimo enačba stanja in (2) je izhodna enačba.

Stanje x_0 in vhod na časovnem intervalu (t_0, t) določata izhod za $t \geq t_0$.

Splošna rešitev je

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds.$$

Sistemi upravljanja

Linearni zvezni časovno nespremenljivi kontrolni sistem lahko opišemo z enačbama

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (2)$$

kjer so $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrika stanja, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ vhodna matrika, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ izhodna matrika, $D \in \mathbb{R}^{r \times m}$ matrika direktnega prenosa, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ vhodni signal in $y(t) \in \mathbb{R}^r$ izhodni signal. Ponavadi je $m \leq n$ in $r \leq n$. Enačbi (1) pravimo enačba stanja in (2) je izhodna enačba.

Stanje x_0 in vhod na časovnem intervalu (t_0, t) določata izhod za $t \geq t_0$.

Splošna rešitev je

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds.$$

Homogeni sistem ($B = 0$) je

- asimptotično stabilen, če za vse lastne vrednosti velja $\operatorname{re}(\lambda_k) < 0$;
- stabilen, če za vse lastne vrednosti velja $\operatorname{re}(\lambda_k) \leq 0$, tiste lastne vrednosti, kjer je $\operatorname{re}(\lambda_k) = 0$ pa so polenostavne;
- nestabilen, če obstaja lastna vrednost z $\operatorname{re}(\lambda_k) > 0$ ali pa defektna lastna vrednost z $\operatorname{re}(\lambda_k) = 0$.

Markovske verige

Denimo, da imamo N stanj in čase $0, 1, 2, \dots$. Prehodna matrika $P^{(k)}$ predstavlja verjetnosti, da sistem v času k preide iz enega stanja v drugo. Velja

$$P_{ij}^{(k)} = P(X_k = j | X_{k-1} = i).$$

Matrika $P^{(k)}$ je **stohastična**. Elementi so nenegativni, vsota vsake vrstice je 1.

Markovske verige

Denimo, da imamo N stanj in čase $0, 1, 2, \dots$. Prehodna matrika $P^{(k)}$ predstavlja verjetnosti, da sistem v času k preide iz enega stanja v drugo. Velja

$$P_{ij}^{(k)} = P(X_k = j | X_{k-1} = i).$$

Matrika $P^{(k)}$ je **stohastična**. Elementi so nenegativni, vsota vsake vrstice je 1. Pri Markovskih verigah nas zanima, kolikšna je verjetnost, da bo po zelo dolgem času sistem v izbranem stanju.

Markovske verige

Denimo, da imamo N stanj in čase $0, 1, 2, \dots$. Prehodna matrika $P^{(k)}$ predstavlja verjetnosti, da sistem v času k preide iz enega stanja v drugo. Velja

$$P_{ij}^{(k)} = P(X_k = j | X_{k-1} = i).$$

Matrika $P^{(k)}$ je **stohastična**. Elementi so nenegativni, vsota vsake vrstice je 1. Pri Markovskih verigah nas zanima, kolikšna je verjetnost, da bo po zelo dolgem času sistem v izbranem stanju.

Če je začetna razporeditev $q^{(0)} = (q_1^{(0)}, \dots, q_N^{(0)})$, potem je $q^{(k)} = q^{(k-1)} P^{(k)}$ in

$$q^{(k)} = q^{(0)} P^{(1)} \dots P^{(k)}.$$

V primeru, ko imamo homogen sistem, je $P^{(i)} = P$ in velja $q^{(k)} = q^{(k-1)} P$. Za stacionarno rešitev q tako velja $q = qP$, torej je q^T levi lastni vektor za P za lastno vrednost 1.

Markovske verige

Denimo, da imamo N stanj in čase $0, 1, 2, \dots$. Prehodna matrika $P^{(k)}$ predstavlja verjetnosti, da sistem v času k preide iz enega stanja v drugo. Velja

$$P_{ij}^{(k)} = P(X_k = j | X_{k-1} = i).$$

Matrika $P^{(k)}$ je **stohastična**. Elementi so nenegativni, vsota vsake vrstice je 1. Pri Markovskih verigah nas zanima, kolikšna je verjetnost, da bo po zelo dolgem času sistem v izbranem stanju.

Če je začetna razporeditev $q^{(0)} = (q_1^{(0)}, \dots, q_N^{(0)})$, potem je $q^{(k)} = q^{(k-1)} P^{(k)}$ in

$$q^{(k)} = q^{(0)} P^{(1)} \dots P^{(k)}.$$

V primeru, ko imamo homogen sistem, je $P^{(i)} = P$ in velja $q^{(k)} = q^{(k-1)} P$.

Za stacionarno rešitev q tako velja $q = qP$, torej je q^T levi lastni vektor za P za lastno vrednost 1.

Če je P ireducibilna, potem je po Perron-Frobeniusovi teoriji 1 res dominantna lastna vrednost, lastni vektor pa ima nenegativne komponente. Če ni druge lastne vrednosti z absolutno vrednostjo 1, potem je lastni vektor q , za katerega velja $\|q\|_1 = 1$ stacionarna porazdelitev.

Najmanjši kvadrati z omejitvami

Za dano simetrično matriko A in vektor b iščemo

$$\min\{x^T A x - 2b^T x : x^T x = \alpha^2\}$$

Najmanjši kvadrati z omejitvami

Za dano simetrično matriko A in vektor b iščemo

$$\min\{x^T A x - 2b^T x : x^T x = \alpha^2\}$$

Uporabimo Langrangeve množitelje in definiramo

$$\varphi(x, \lambda) = x^T A x - 2b^T x - \lambda(x^T x - \alpha^2)$$

Z odvajanjem po x in λ dobimo enačbi

$$Ax = \lambda x, \quad \alpha^2 = x^T x.$$

Najmanjši kvadrati z omejitvami

Za dano simetrično matriko A in vektor b iščemo

$$\min\{x^T A x - 2b^T x : x^T x = \alpha^2\}$$

Uporabimo Langrangeve množitelje in definiramo

$$\varphi(x, \lambda) = x^T A x - 2b^T x - \lambda(x^T x - \alpha^2)$$

Z odvajanjem po x in λ dobimo enačbi

$$Ax = \lambda x, \quad \alpha^2 = x^T x. \quad (3)$$

Izkaže se, da za rešitev potrebujemo najmanjšo lastno vrednost λ .

Če predpostavimo, da λ ni lastna vrednost A , lahko definiramo

$$y = (A - \lambda I)^{-2} b = (A - \lambda I)^{-1} x.$$

Sledi, da je sistem (3) ekvivalenten

$$b^T y - \alpha^2 = 0$$

$$(A - \lambda I)^2 y = b.$$

Tako iz $(b^T y)/\alpha^2 = 1$ pridemo do QEP

$$(\lambda^2 I - 2\lambda A + (A^2 - \alpha^{-2} b b^T)) y = 0.$$