

Četrti kolokvij iz Linearne algebre
3. junij 2015

Priimek in ime: Vpisna št.:

--	--	--	--	--	--	--	--

Možnih je 125 točk, pri čemer 100% pomeni 100 točk (Tudi točke nad 100 se upoštevajo pri povprečju kolokvijev.). Naloge so na obeh straneh!

1. [25] Določi Jordanovo formo in prehodno matriko matrike

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. [25] Naj bo $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ vektorski prostor polinomov stopnje največ dva opremljen s skalarnim produktom

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx.$$

Naj bo na prostoru $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ dan predpis $f(p) := 2 \int_0^3 p(x)dx$.

- (a) [5] Dokaži, da je f linearni funkcional.
(b) [20] Poišči vektor, ki po Rieszovem izreku pripada funkcionalu f .
3. [25] Naj bo prostor $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ opremljen s skalarnim produktom

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Naj bo dan podprostor

$$\mathcal{U} := \{p \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] : p'(0) = 0\}.$$

- (a) [10] Poišči ortogonalno bazo za $\mathcal{U}$.
(b) [10] Kateri polinom iz $\mathcal{U}$ je najbližje polinomu $r(x) = x + 1$?
(c) [5] Kolikšna je oddaljenost polinoma r od podprostora $\mathcal{U}$?

4. [25] Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom. Dokaži, da je jedro operatorja $A^*A + B^*B$ enako preseku jeder operatorjev A in B za poljubna linearna operatorja A in B .
5. [25] Linearna preslikava $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je definirana s predpisom

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots, x_n - x_1).$$

Poišči predpis za adjungirano preslikavo A^* , pri čemer je $\mathbb{R}^n$ opremljen z običajnim skalarnim produktom, tj.

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$