

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Uporabljate lahko pisalo, kalkulator in dva lista formata A4 z zapiski!

1	2	3	4	Σ

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Ime in priimek

Naloga 1 [25 točk]

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ strogo diagonalno dominantna matrika po vrsticah in $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

- Opišite **ekonomičen** algoritem za izračun matrike X , ki zadošča enačbi $X A = B$.
- Algoritem uporabite v primeru, ko je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

in

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 23 & 25 & 27 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Najprej opazimo, da je enačba $X A = B$ ekvivalentna enačbi $A^T X^T = B^T$. Če je $Y = X^T$, rešujemo torej matrični sistem $A^T Y = B^T$. Zapišimo $B^T = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m]$, kjer so $\mathbf{c}_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, stolpci matrike B^T .

Najprej izvedemo LU razcep brez pivotiranja za matriko A^T (ker je matrika A^T strogo diagonalno dominantna po stolpcih, je to mogoče), torej $A^T = L U$. Nato pa rešujemo sisteme

$$\begin{aligned} L \mathbf{z}_j &= \mathbf{c}_j \\ U \mathbf{y}_j &= \mathbf{z}_j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Za LU razcep potrebujemo $\mathcal{O}(n^3)$ operacij, za vsakega od zgornjih trikotnih sistemov pa $\mathcal{O}(n^2)$ operacij, skupaj torej $\mathcal{O}(n^3 + m n^2)$. S tem je rešena točka a).

Za rešitev točke b) sledimo korakom iz točke a) in dobimo

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 8/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix}.$$

Z nekaj računanja nato še

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Naloga 2 [25 točk]

Naj bo $f(x) = x^5 + 2x - 4$. Poiščite vse realne ničle funkcije f z Newtonovo metodo na 4 mesta natančno. Utemeljite, da ste poiskali res vse ničle.

Rešitev: Funkcija f je monotonno naraščajoča, saj je $f'(x) = 5x^4 + 2 > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Ker je polinom lihe stopnje, ima natanko eno realno ničlo. Zaradi $f(1)f(2) < 0$ je ničla na $[1, 2]$. Nekaj korakov Newtonovo metode nas pripelje do ničle $x \approx 1.1198$.

Naloga 3 [25 točk]

Naslednja tabela prikazuje spreminjanje temperature (v °C) s časom (v urah):

ura	16	18	20	22
temp.	4	2	-2	-3

- a) Določite premico, ki po metodi najmanjših kvadratov najbolj opisuje podatke v tabeli.
- b) S pomočjo premice ocenite (do minute natančno), kdaj je temperatura padla na 0 °C.

Rešitev: Za določitev premice $y = kx + n$ po metodi najmanjših kvadratov uporabimo kar rešitev preko normalnega sistema $A^T A \mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 1 \\ 18 & 1 \\ 20 & 1 \\ 22 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = [k, n]^T, \quad \text{in } \mathbf{b} = [4, 2, -2, -3]^T.$$

Tako dobimo $k = -1.25$ in $n = 24$.

Za rešitev točke b) moramo torej rešiti enačbo $-1.25x + 24 = 0$. Dobimo $x = 19.2$, kar pomeni, da bo temperatura padla na nič on 19. uri in 12 minut.

Naloga 4 [25 točk]

Gibanje delca v tridimenzionalnem prostoru opisuje krivulja $\mathbf{r} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$. Na delec delujejo zunanje sile, zato se podreja zvezi

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = (0, 0, 1) - \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|_2 \dot{\mathbf{r}}(t).$$

Ob času $t = 0$ je $\mathbf{r}(0) = (0, 0, 0)$ in $\dot{\mathbf{r}}(0) = (1, 1, 1)$. Z Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.1$ izračunajte velikost hitrosti delca ob času $t = 0.1$.

Rešitev: Če pišemo $\mathbf{r} = (x, y, z)$, lahko vektorsko diferencialno enačbo drugega reda prevedemo na sistem 6 diferencialnih enačb prvega reda. Pišimo $u_1 = x$, $u_2 = \dot{x}$, $u_3 = y$, $u_4 = \dot{y}$, $u_5 = z$, $u_6 = \dot{z}$. Dobimo sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= u_2 \\ \dot{u}_2 &= -\sqrt{\dot{u}_2^2 + \dot{u}_4^2 + \dot{u}_6^2} u_2 \\ \dot{u}_3 &= u_4 \\ \dot{u}_4 &= -\sqrt{\dot{u}_2^2 + \dot{u}_4^2 + \dot{u}_6^2} u_4 \\ \dot{u}_5 &= u_6 \\ \dot{u}_6 &= 1 - \sqrt{\dot{u}_2^2 + \dot{u}_4^2 + \dot{u}_6^2} u_6\end{aligned}$$

Upoštevamo $u_i(0) = 0$, $i = 1, 2, 5$ in $u_i(0) = 1$, $i = 2, 4, 6$. Če pišemo $\mathbf{u}^k = (u_i^k)_{i=1}^6$, $k = 0, 1, \dots$, dobimo

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^1 &= \mathbf{u}^0 + h \mathbf{F}(t_0, \mathbf{u}^0) = (0, 1, 0, 1, 0, 1) + 0.1(1, -\sqrt{3}, 1, -\sqrt{3}, 1, 1 - \sqrt{3}) \\ &= (0.1, 1 - 0.1\sqrt{3}, 0.1, 1 - 0.1\sqrt{3}, 0.1, 1.1 - 0.1\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Velikost hitrosti je torej $\sqrt{(u_2^1)^2 + (u_4^1)^2 + (u_6^1)^2} \approx 1.4920$.