

1. IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD–FIZIKI
19.6.2012

1. S pomočjo Householderjevih zrcaljenj in QR razcepa rešite sistem enačb

$$\begin{aligned}2x + 2y + 6z &= 6, \\2x + y - 2z &= -1, \\x + 6y - 2z &= -7.\end{aligned}$$

Zapišite vmesne rezultate.

2. Za reševanje enačbe $e^x = \frac{1}{x}$ bi radi uporabili iteracijsko formulo

$$x_{r+1} = \frac{x_r(1 + x_r)}{1 + 2x_r + \log x_r}.$$

- (a) Izračunajte red konvergence te iteracije.
(b) S pomočjo gornje iteracije izračunajte rešitev na 4 mesta natančno. Za začetni približek vzemite $x_0 = 0.5$. Koliko iteracij potrebujete?
3. Funkcijo $f(x) = \log(1 + x)$ interpolirate s polinomom p_5 stopnje ≤ 5 v točkah $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ in $x_2 = 2$ dvojno, torej v vsaki točki interpolirate vrednost in odvod. Kar se da natančno ocenite napako

$$\max_{x \in [0,2]} |f(x) - p_5(x)|.$$

4. Dan je začetni problem drugega reda

$$y'' - xy + 1 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

S trapezno metodo

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})),$$

in korakom $h = 0.5$ izračunajte približek za $y'(0.5)$.

Čas reševanja je 90 minut. Naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba literature in kalkulatorja.

2. IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD–FIZIKI
27.8.2012

1. Z *LU* razcepom brez pivotiranja rešite sistem linearnih enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 7 & 0 & -1 \\ 4 & -6 & 11 & 10 \\ 2 & -5 & -5 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ 48 \\ -51 \end{pmatrix}.$$

2. Preverite, da ima polinom $p(x) = -x^5 - x + 1$ natanko eno realno ničlo. Nato to ničlo poiščite z Newtonovo metodo na 4 mesta natančno.
3. Podane imate vrednosti meritev količine y , ki je odvisna od časa t , torej $y = y(t)$. Tabela meritev vsebuje vrednosti $y(t_i)$, pri časih t_i , $i = 1, 2, \dots, N$, $N \gg 1$. Sumite, da je funkcija y oblike $y(t) = a/(t + b)$, kjer sta $a, b \in \mathbb{R}$ neznana parametra. Natančno opišite postopek za (približno) določitev parametrov a in b .
4. Z eksplicitno Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.1$ določite približek za $y'(0.2)$, če je y rešitev začetnega problema

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Čas reševanja je 90 minut. Naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba literature in kalkulatorja.

Ime in priimek

--	--	--	--	--

1 2 3 4 Σ

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Naloga 1 [25 točk]

Izračunajte LU razcep z delnim pivotiranjem za matriko

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zapišite torej permutacijsko matriko P , spodnjo trikotno matriko L z enkami na diagonali in zgornjo trikotno matriko U , da je $PA = LU$.

Naloga 2 [25 točk]

Podan je polinom $p(x) = ax^3 + (1-a)x^2 - 1$, $a \in \mathbb{R}$. Polinom ima ničlo pri $x = 1$, ki jo numerično računamo s tangentno metodo.

- a) Za katera števila a je red konvergence tangentne metode vsaj dva?
- b) Določite tisto število a , pri katerem je red konvergence vsaj tri?
- c) Za a iz točke b) izračunajte približka x_1 in x_2 po tangentni metodi, če je $x_0 = 0.5$.

Naloga 3 [25 točk]

Med vsemi polinomi stopnje ≤ 4 , ki interpolirajo tabelo

$$\begin{array}{c|cccc} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & -2 & 0 & 2 & 10 \end{array},$$

poiščite tistega, ki ima po absolutni vrednosti najmanjši vodilni koeficient.

Naloga 4 [25 točk]

Začetni problem drugega reda

$$y'' + \sin y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

rešujete z implicitno Eulerjevo metodo

$$y_{k+1} = y_k + h f(x_{k+1}, y_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots$$

Določite približek za vrednost $y'(-0.1)$, če je korak $h = -0.1$. Sistem nelinearnih enačb, ki ga dobite, rešujete z navadno iteracijo. Za katere vrednosti h taka iteracija gotovo konvergira?