

1	2	3	4	Σ

Vpisna številka						

Ime in priimek

Naloga 1 [25 točk]

Izračunajte LU razcep z delnim pivotiranjem za matriko

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Natančneje, določite zgornjo trikotno matriko U , spodnjo trikotno matriko L z enicami po diagonali in permutacijsko matriko P , da bo $PA = LU$.

Rešitev: Na prvem koraku zamenjamo prvo in zadnjo vrstico (menjave sproti izvajamo v matriki P , ki je na začetku identiteta) in naredimo eliminacije v prvem stolpcu. Dobimo matriko

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1/2 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Na drugem koraku zamenjamo drugo in tretjo vrstico in naredimo eliminacije v preostanku drugega stolpca. Dobimo

$$A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & -4/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Na tretjem koraku pivotiranje ni potrebno. Izvedemo samo eliminacijo preostale enke v tretjem stolpcu. Dobimo

$$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & -4/3 & 1 \\ 0 & 0 & -3/4 & -5/4 \end{pmatrix}.$$

Matrika L je sedaj spodnji trikotnik matrike A_3 in enice po diagonali, matrika U zgornji trikotnik matrike A_3 vključno z diagonalo, matrika P pa

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Naloga 2 [25 točk]

Iščete ničle funkcije $f_a(x) = x - a + 1/x$.

- a) Preverite, da ima f_a za $a > 2$ natanko dve realni ničli.
- b) Poiščite tako funkcijo h_a , da bo za $a > 2$ navadna iteracija

$$x_{n+1} = \frac{h_a(x_n)}{x_n^2 - 1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

za dovolj dober začetni približek x_0 konvergirala k eni od ničel funkcije f_a z redom konvergence vsaj 2.

- c) S pomočjo točke b) poiščite večjo od ničel funkcije f_3 na tri mesta natančno. Zapišite začetni približek x_0 ter x_1, x_2 in x_3 .

Rešitev:

- a) Enačbo $f_a(x) = 0$ preoblikujemo v $x^2 - ax + 1 = 0$. Ker gre za preprosto kvadratno enačbo, ima slednja dve realni rešitvi natanko tedaj, ko je diskriminanta pozitivna, torej $a > 2$.
- b) Iz točke a) zlahka sklepamo, da ima f_a dve enostavni ničli. V tem primeru vemo, da Newtonova metoda konvergira k ničlam z redom vsaj dva. Torej poskusimo h_a izračunati tako, da je omenjena iteracija ravno Newtonova metoda. Kratek račun nas pripelje do

$$h_a(x) = ax^2 - 2x.$$

- c) Za $a = 3$ iz grafa (ali kako drugače) preberemo, da je večja ničla nekje med 2 in 3. Izberemo $x_0 = 2.5$ in izvajamo iteracijo iz točke b). Dobimo $x_1 = 2.6190$, $x_2 = 2.6180$ in $x_3 = 2.6180$.

Naloga 3 [25 točk]

Funkcijo $f(x) = 1/(1+x)$ interpolirate na intervalu $[0, h]$, $h > 0$, z interpolacijskim polinomom stopnje 5. Interpolirate vrednost in odvod v točkah $x = 0, h/2, h$.

- Določite interpolacijski polinom v Newtonovi obliki, če je $h = 2$.
- Čim boljše ocenite, koliko je lahko največ h , da bo napaka pri interpolaciji manjša od 0.01.

Rešitev:

- Sestavimo tabelo deljenih diferenc

x	$[\cdot]$	$[\cdot, \cdot]$	$[\cdot, \cdot, \cdot]$	$[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$	$[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$	$[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$
0	1					
		-1				
0	-1		1/2			
		-1/2		-1/4		
1	1/2		1/4		1/12	
		-1/4		-1/12		-1/36
1	-1/4		1/12		1/36	
		-1/6		-1/36		
2	1/3		1/18			
		-1/9				
2	-1/9					

Interpolacijski polinom je

$$p(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^2(x-1) + \frac{1}{12}x^2(x-1)^2 - \frac{1}{36}x^2(x-1)^2(x-2).$$

- Napaka se izraža kot

$$|f(x) - p_5(x)| = \left| \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} \omega(x) \right|$$

kjer je $0 \leq \xi \leq h$ $\omega(x) = x^2(x-h/2)^2(x-h)^2$. Išcemo torej čim boljšo zgornjo mejo za

$$\max_{x \in [0, h]} |f(x) - p_5(x)|.$$

Ker je $f^{(6)}(x) = 6!/(1+x)^7$, je

$$\max_{\xi \in [0, h]} \left| \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} \right| \leq 1.$$

Po drugi strani so ekstremi funkcije ω doseženi pri $x = 0, h/2, h$ in

$$x = \frac{h}{6} (3 \pm \sqrt{3}).$$

Torej je

$$\max_{x \in [0, h]} |\omega(x)| \leq \left| \omega \left(\frac{h(3 \pm \sqrt{3})}{6} \right) \right| = \frac{h^6}{432}.$$

Ker želimo, da je

$$\max_{x \in [0, h]} |f(x) - p_5(x)| < 1/100,$$

je dovolj zagotoviti

$$\frac{h^6}{432} < 0.01,$$

oziroma $h < 1.2762$.

Naloga 4 [25 točk]

Naj bo

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Uporabite Sturmovo zaporedje in odgovorite na spodnji vprašanji.

- a) Ali je število -1 lastna vrednost matrike A ?
- b) Koliko lastnih vrednosti je strogo manjših od -1 ?

Rešitev: Pri obeh vprašanjih potrebujemo Sturmovo zaporedje polinomov izračunano pri -1 . V praksi polinomov Sturmovega zaporedja ne potrebujemo, saj lahko računamo neposredno njihove vrednosti, vendar jih tukaj vseeno zapišimo. Z nekaj računanja pridemo do

$$\begin{aligned} f_0(\lambda) &= 1, \\ f_1(\lambda) &= -2 - \lambda, \\ f_2(\lambda) &= \lambda^2 + 4\lambda + 3, \\ f_3(\lambda) &= -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 10\lambda - 4, \\ f_4(\lambda) &= \lambda^4 + 8\lambda^3 + 21\lambda^2 + 20\lambda + 5, \\ f_5(\lambda) &= -\lambda^5 - 10\lambda^4 - 36\lambda^3 - 56\lambda^2 - 35\lambda - 6. \end{aligned}$$

Za $\lambda = -1$ dobimo zaporedje $\{1, -1, 0, 1, -1, 0\}$. Ker je na koncu zaporedja 0, je $\lambda = -1$ lastna vrednost matrike A . Število ujemanj predznakov v zgornjem zaporedju je enako 1 (ničlo v notranjosti štejemo za eno ujemanje). To pomeni, da je natanko ena lastna vrednost strogo večja od -1 . Ker je ena enaka -1 , morajo biti 3 strogo manjše od -1 .

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Uporabljate lahko pisalo, kalkulator in dva lista formata A4 z zapiski!

Ime in priimek

1	2	3	4	Σ

Vpisna številka							

Naloga 1 [25 točk]

Z razcepom Choleskega preverite, ali je matrika

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

simetrična pozitivno definitna.

Rešitev: Sledimo algoritmu razcepa Choleskega. Računamo torej spodnjo trikotno matriko V , da bo $A = V V^T$. Če se algoritem v realni aritmetiki konča, je to tudi dokaz, da je matrika simetrična pozitivno definitna. Dobimo

$$V_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Naloga 2 [25 točk]

Predlagajte iterativno metodo za izračun vrednosti $\sqrt[10]{10}$, ki ima kvadratično konvergenco. Z ustrezno izbranim začetnim približkom nato iskano vrednost izračunajte na štiri mesta natančno.

Rešitev: Vrednost $\sqrt[10]{10}$ je ničla funkcije $f(x) = x^{10} - 10$. Ker je ničla enostavna, bo Newtonova metoda konvergirala kvadratično. Za iteracijo torej lahko izberemo

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)} = \frac{9x_r^{10} + 10}{10x_r^9}, \quad r = 0, 1, \dots$$

Če izberemo $x_0 = 1.25$, dobimo $x_1 = 1.2592$, $x_2 = 1.2589$ in $x_3 = 1.2589$.

Naloga 3 [25 točk]

Funkcijo $f(x) = x^2$ na intervalu $[0, 3]$ aproksimirate z odsekoma linearno funkcijo ℓ_a tako, da je za neko izbrano vrednost $0 < a < 3$ graf funkcije ℓ_a na $[0, a]$ daljica med točkama $(0, f(0))$ in $(a, f(a))$, na $[a, 3]$ pa daljica med točkama $(a, f(a))$ in $(3, f(3))$.

a) Določite predpis za ℓ_a , če je $a = 1$.

b) Izračunajte

$$\min_{a \in (0,3)} \max_{0 \leq x \leq 3} |f(x) - \ell_a(x)|.$$

Rešitev: Splošni predpis za ℓ_a je

$$\ell_a(x) = \begin{cases} ax, & 0 \leq x \leq a, \\ (a+3)(x-3) + 9, & a < x \leq 3. \end{cases}$$

Za izračun vrednosti

$$\min_{a \in (0,3)} \max_{0 \leq x \leq 3} |f(x) - \ell_a(x)|$$

upoštevamo dejstvo, da na vsakem od intervalov $[0, a]$ in $[a, 3]$ interpoliramo f z linearno funkcijo. Napaka pri interpolaciji s premico se izraža kot

$$|f(x) - \ell_a(x)| = \left| \frac{f''(\xi_1)}{2} (x-0)(x-a) \right|, \quad 0 \leq x \leq a, \quad \xi_1 \in [0, a],$$
$$|f(x) - \ell_a(x)| = \left| \frac{f''(\xi_2)}{2} (x-a)(x-3) \right|, \quad a \leq x \leq 3, \quad \xi_2 \in [a, 3],$$

Upoštevamo, da je $f''(\xi) \equiv 2$ ter

$$\max_{0 \leq x \leq a} |x(x-a)| = a^2/4,$$
$$\max_{a \leq x \leq 3} |(x-a)(x-3)| = (3-a)^2/4.$$

Izračunati moramo torej

$$\min_{0 < a < 3} \{a^2/4, (3-a)^2/4\},$$

od koder dobimo $a = 3/2$ in

$$\min_{0 < a < 3} \{a^2/4, (3-a)^2/4\} = 9/16.$$

Naloga 4 [25 točk]

Krivulja $\mathbf{r} = (x, y, z) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadošča diferencialni enačbi

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = (x(t)^2 - \dot{y}(t), \cos(x(t)) - z(t), \dot{x}(t) - x(t)) .$$

Z eksplisitno Eulerjevo metodo s korakom $\Delta t = 0.1$ izračunajte približek za $\|\dot{\mathbf{r}}(0.1)\|_2$, če je $\mathbf{r}(0) = (1, 1, 1)$ in $\dot{\mathbf{r}}(0) = (1, -1, 1/2)$.

Rešitev: Ker je $\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$, zgornjo diferencialno enačbo drugega reda prevedemo na sistem prvega reda z uvedbo spremenljivk $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $y_1 = y$, $y_2 = \dot{y}$, $z_1 = z$, $z_2 = \dot{z}$. Tako dobimo sistem

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1^2 - y_2, \quad \dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = \cos x_1 - z_1, \quad \dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = x_2 - x_1,$$

oziroma v vektorski obliki

$$\dot{\mathbf{W}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{W}), \quad \mathbf{W} = (x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2), \quad \mathbf{F} = (x_2, x_1^2 - y_2, y_2, \cos(x_1) - z_1, x_2, x_2 - x_1).$$

Upoštevamo $\mathbf{r}(0) = (x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 1)$ in $\dot{\mathbf{r}}(0) = (x_2, y_2, z_2) = (1, -1, 1/2)$ in dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1 &= \mathbf{W}_0 + 0.1 \mathbf{F}(0, \mathbf{W}_0) = (1, 1, 1, -1, 1, 1/2) + 0.1(1, 2, -1, \cos(1) - 1, 1/2, 0) \\ &= (1.1, 1.2, 0.9, -1.04597, 1.05, 0.5). \end{aligned}$$

Od tod $\dot{\mathbf{r}}(0.1) \approx (1.2, -1.04597, 0.5)$ in $\|\dot{\mathbf{r}}(0)\|_2 = 1.6685$.

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk, naloge so enakovredne. Uporabljate lahko pisalo, kalkulator in dva lista formata A4 z zapiski!

1	2	3	4	Σ

--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Ime in priimek

Naloga 1 [25 točk]

Naj bo $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nesingularna zgornja trikotna matrika in $\mathbf{e}_j = [\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{j-1}, 1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-j}]^T$. Predlagajte **učinkovit** postopek za izračun vektorja $U^{-1}\mathbf{e}_j$. **Natančno** preštejte število potrebnih operacij (štejete seštevanja, odštevanja, množenja in deljenja).

Rešitev: Najpomembnejša opazka je, da ne računamo inverza matrike, ampak rešujemo sistem linearnih enačb $U\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$. Ker je matrika zgornja trikotna, uporabimo algoritem obratnega vstavljanja. Vektor $\mathbf{e}_j$ na desni strani sistema je poseben, zato hitro opazimo, da je $x_k = 0$, $k = j+1, j+2, \dots, n$. Ostale komponente izračunamo takole

```
for k=j:-1:1
    x(k)=(e(k)-U(k+1:j)*x(k+1:j))/U(k,k);
end
```

Število operacij je tako

$$1 + \sum_{k=1}^{j-1} (2 + (2(j-k) - 1)) = j + 2j(j-1) - (j-1)j = j^2.$$

Naloga 2 [25 točk]

Zapišite interpolacijski polinom p v Newtonovi obliki, ki se s funkcijo $f(x) = \sqrt{1+x}$ ujema v točkah $x_0 = 0$, $x_1 = 3$ in $x_2 = 8$. Obenem ima v točki x_1 enak odvod kot funkcija f .

Rešitev: Tabela deljenih diferenc je

x	$[\cdot]$	$[\cdot, \cdot]$	$[\cdot, \cdot, \cdot]$	$[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$
0	1			
		1/3		
3	2		-1/36	
		1/4		1/450
3	1/4		-1/100	
		1/5		
8	3			

Interpolacijski polinom v Newtonovi obliki se torej glasi

$$p(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{36}x(x-3) + \frac{1}{450}x(x-3)^2.$$

Naloga 3 [25 točk]

Naj bo

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Določite ortogonalno matriko Q , da bo

$$AQ = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Opomba: Zvezdica označuje poljubno število.

Rešitev: Iz zveze v besedilu naloge dobimo, da je

$$Q^T A^T = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Torej za Q^T lahko izberemo Givensovo rotacijo, ki “uniči” element na mestu $(2, 1)$ v matriki A^T . Po znanih formulah za Givensove rotacije dobimo

$$Q^T = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}.$$

Naloga 4 [25 točk]

Začetni problem

$$y''(x) + y'(x) + y(x) + 1 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$$

rešujete s trapezno metodo

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} (f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}))$$

za sistem prvega reda s korakom $h = 0.5$. Izračunajte numerični približek za $y'(0.5)$.

Rešitev: Uvedemo novi neznanki $y_1 = y$ in $y_2 = y'$. Od tod dobimo sistem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_2 - y_1 - 1. \end{aligned}$$

Če pišemo $\mathbf{Y} = [y_1, y_2]^T$, se torej zgornji sistem prepiše v

$$\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y} + \mathbf{b},$$

kjer je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = [0, -1]^T.$$

Trapezna metoda se torej glasi

$$\mathbf{Y}_{k+1} = \mathbf{Y}_k + \frac{h}{2} (A\mathbf{Y}_k + \mathbf{b} + A\mathbf{Y}_{k+1} + \mathbf{b}).$$

Od tod dobimo

$$\left(I - \frac{h}{2}A\right)\mathbf{Y}_{k+1} = \left(I + \frac{h}{2}A\right)\mathbf{Y}_k + h\mathbf{b}.$$

Iz začetnih pogojev dobimo $\mathbf{Y}_0 = [1, 1]^T$, od koder ha $h = 0.5$ sledi $\mathbf{Y}_1 = [1.1905, -0.2381]^T$. Torej je $y'(0.5) \approx -0.2381$.