

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Uporabljate lahko pisalo, kalkulator in dva lista formata A4 z zapiski!

Ime in priimek

1	2	3	4	Σ

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Naloga 1 [25 točk]

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ strogo diagonalno dominantna matrika po stolpcih.

- Opišite **ekonomičen** algoritem za izračun prvega in zadnjega stolpca matrike A^{-1} .
- Algoritem uporabite na primeru

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Naloga 2 [25 točk]

Izvajate iteracijo

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 6x_n}{3x_n^2 + 2}.$$

- a) Preverite, da za pozitivni začetni približek x_0 zaporedje približkov po zgornji iteraciji lahko konvergira le k $\sqrt{2}$.
- b) Izačunajte red konvergence iteracije k $\sqrt{2}$.
- c) Izačunajte x_1 in x_2 , če je $x_0 = 1.5$.

Naloga 3 [25 točk]

Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & a \end{bmatrix},$$

kjer je $a \in \mathbb{R}$. S pomočjo Sturmovega zaporedja odgovorite na naslednji vprašanji.

- a) Za katere vrednosti parametra a ima A vse tri lastne vrednosti pozitivne?
- b) Za katere vrednosti parametra a ima A natanko dve pozitivni lastni vrednosti?

Naloga 4 [25 točk]

Začetni problem

$$y'' - x y' + x^2 y = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$$

rešujete z implicitno Eulerjevo metodo

$$y_{k+1} = y_k + h f(x_{k+1}, y_{k+1})$$

za sistem diferencialnih enačb.

- a) Izpeljite red lokalne napake implicitne Eulerjeve metode.
- b) Z omenjeno metodo izračunajte približek za $y'(0.25)$, če je korak $h = 0.25$.

Numerične metode-fiziki, drugi izpit, 28. 8. 2014
Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Uporabljate lahko pisalo, kalkulator in dva lista formata A4 z zapiski!

--	--	--	--	--

1	2	3	4	Σ
---	---	---	---	----------

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Ime in priimek

Naloga 1 [25 točk]

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -4 & 3 \\ 1 & 4 & a & 4 \\ 1 & 4 & 3a - 2 & a + 7 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

S pomočjo LU razcepa brez pivotiranja ugotovite, za katere vrednosti $a \in \mathbb{R}$ je matrika A singularna.

Naloga 2 [25 točk]

Dana je funkcija $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \frac{1}{2} - \int_0^x \exp(-t^2) dt.$$

- a) Prepričajte se, da ima f natanko eno ničlo na $(0, \sqrt{2}/2)$. Namig: Funkcija $g(t) = \exp(-t^2)$ je konkavna na $(0, \sqrt{2}/2)$.
- b) Prepričajte se, da ima f natanko eno ničlo na $(0, \infty)$.
- c) Preverite, da je red konvergence Newtonove metode za iskanje ničle funkcije f enak 2.

Naloga 3 [25 točk]

Funkcijo $f(x) = \exp(-x)$ interpolirate s polinomom pete stopnje $p_{5,h}$ na intervalu $[0, h]$, $h > 0$, tako, da interpolirate vrednost, prvi odvod in drugi odvod v točkah 0 in h .

a) Čim bolj natančno ocenite

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - p_{5,1}(x)|.$$

b) Kolikšen je lahko največ h , da je gotovo

$$\max_{x \in [0,h]} |f(x) - p_{5,h}(x)| \leq 10^{-3}?$$

Naloga 4 [25 točk]

Začetni problem

$$y' = -x \sin y, \quad y(0) = 1,$$

rešujete z implicitno metodo

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} (f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})).$$

Izračunajte približek za $y(0.5)$, če je $h = 0.5$. Ustrezno nelinearno enačbo rešujte z navadno iteracijo (naredite vsaj tri korake).

Numerične metode-fiziki, tretji izpit, 22. 9. 2014
Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Uporabljate lahko pisalo, kalkulator in dva lista formata A4 z zapiski!

Ime in priimek

1	2	3	4	Σ

Vpisna številka							

Naloga 1 [25 točk]

Za matriko

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & -5 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 9 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

izračunajte LU razcep brez pivotiranja. Zapišite vse vmesne matrike pri računanju.

Naloga 2 [25 točk]

Poiščite vse realne ničle polinoma $p(x) = x^5 + 5x - 2$. Za vsako ničlo izberite primerno numerično metodo in ničlo izračunajte na dve decimalni mesti natančno. Utemeljite, da ste res poiskali vse realne ničle.

Naloga 3 [25 točk]

Po metodi najmanjših kvadratov poiščite funkcijo oblike $f(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x$, ki najbolj aproksimira tabelo podatkov

x	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
y	-1	-1	1	1	-1

Rezultat utemeljite z računom.

Naloga 4 [25 točk]

Rešujete začetni problem oblike

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= x - \dot{y}, \\ \ddot{y} &= \sin y - \dot{x}, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = -1, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 1.\end{aligned}$$

Z eksPLICITNO Eulerjevo metodo določite približek za $y(0.5)$, če je korak metode $h = 0.5$.