

## Prvi kolokvij iz Analize 3

16. november 2009

1. Reši enačbo  $(x + y) dx + (x - y - 2) dy = 0$ .
2. Reši enačbo  $x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1$ .
3. Opiši družino krivulj, ki družino grafov  $\{y = Cx^2; C \in \mathbb{R}\}$  povsod seka pod kotom  $\pi/4$ .
4. Naj bosta  $p$  in  $q$  zvezni funkciji na  $\mathbb{R}$ . Dokaži, da je prostor rešitev enačbe  $y' + py = q$  translacijsko invarianten natanko takrat, ko sta  $p$  in  $q$  konstantni funkciji.  
Translacijska invariantnost pomeni, da je za vsako rešitev  $y$  in vsak  $t \in \mathbb{R}$  funkcija  $x \mapsto y(x + t)$  spet rešitev enačbe.

Rešitve so na dalj.

## Prvi kolokvij iz Analize 3

29. november 2007

1. Reši enačbo

$$y' = (x - y + 1)^2 + x - y$$

ob robnem pogoju  $y(0) = 6$ .

Nasvet: uvedi novo spremenljivko.

2. Reši enačbo

$$y' = x^3(y - x)^2 + \frac{y}{x}.$$

3. Poišči vse gladke ( $C^1$ ) krivulje v  $\mathbb{R}^2$ , za katere v vsaki točki velja, da je  $x$ -koordinata presečišča normale z abscisno osjo enaka  $y$ -koordinati presečišča tangente z ordinatno osjo.

4. Reši enačbo

$$x \, dy = (x^5 + x^3 y^2 + y) \, dx.$$

## Prvi kolokvij iz Analize 3

24. november 2008

1. Za katera naravna števila  $m, n$  ortogonalno družino k družini krivulj  $y^m = Cx^n + 1$  tvorijo same elipse?
2. Kateremu pogoju morata zadoščati funkciji  $P$  in  $Q$ , da bo imela enačba

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

integrirajoči množitelj oblike  $\mu = \mu(xy)$  (torej odvisen zgolj od produkta spremenljivk)?

Reši

$$\left(xy^2 + 2y - \frac{1}{x}\right) dx = \left(x^2y - 2x + \frac{1}{y}\right) dy.$$

3. Reši enačbo

$$x^4(y^2 + 2y + 3y') = 1 - 6x - x^4.$$

Nasvet: najprej se znebi linearne člena.

4. Reši enačbo

$$xy' = x^2e^{-y} + 2.$$

Lahko poskusiš z vpeljavo nove spremenljivke.

Drugi kolokvij iz Analize 3  
17. januar 2008

1. Določi funkcijo  $f$ , da bo enačba

$$2y'^2 + f(x, y)y' + y = 0$$

imela singularno rešitev. To rešitev tudi poišči.

2. Reši enačbo

$$y''y = 3y'^2 + yy'$$

ob robnih pogojih  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -1$ .

3. Pokaži, da linearno diferencialno enačbo drugega reda s konstantnimi koeficienti lahko s pomočjo integrirajočega množitelja zreduciramo na linearno diferencialno enačbo prvega reda. Natančneje, ob danih  $p, q \in \mathbb{R}$  najdi takšno število  $r$  (lahko je kompleksno) in takšno funkcijo  $\mu = \mu(x)$ , da bo veljalo

$$[\mu(y' + ry)]' = \mu(y'' + py' + qy).$$

4. Imejmo dve diferencialni enačbi z zveznimi realnimi koeficienti  $p_1, q_1, p_2, q_2$ , in sicer

$$y'' + p_j y' + q_j y = 0 \quad (1)$$

za  $j = 1, 2$ . Privzemimo, da je  $|p_1(x)| \leq |p_2(x)|$ . Če vzamemo poljubna para rešitev enačb (??) in z  $W_1$  ter  $W_2$  označimo pripadajoči determinanti Wronskega, ali iz  $\lim_{x \rightarrow \infty} W_1(x) = 0$  sledi  $\lim_{x \rightarrow \infty} W_2(x) = 0$ ? (Če je odgovor nikalen, najdi kak protiprimer.)

Kaj pa, če sta  $p_1$  in  $p_2$  pozitivni funkciji?

5. [bonus naloga] Naj bo funkcija  $y = f(x)$  rešitev enačbe

$$4y'' + 8y' = -5.$$

Pokaži, da ima funkcija

$$g(x) = \frac{f(x)^2}{f(x)^4 + 1}$$

maksimum na  $\mathbb{R}$ .

## Drugi kolokvij iz Analize 3

26. januar 2009

1. Reši enačbo  $x^2 y'' - 2y = \sin \log x$ .
2. Reši enačbo  $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \sin^{-1} x$ .
3. Privzemimo, da funkcija  $y \in C^2(\mathbb{R})$  zadošča pogojem

$$y'' = -|y|, \quad y(0) > 0, y'(0) = 0.$$

Pokaži, da ima  $y$  natanko eno ničlo na  $(0, \infty)$ .

- \*4. Naj bo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  omejena zvezno odvedljiva funkcija. Dokaži, da je vsaka rešitev naloge  $y' = f(y)$  monotona (torej nepadajoča ali nenaraščajoča).
5. Reši sistem enačb

$$\begin{aligned} \dot{x} - x - y &= 0 \\ \dot{y} - 8x + y &= 0. \end{aligned}$$

\* Dodatna naloga; enakovredna ostalim.

**Odgovore dobro utemelji.**

## Drugi kolokvij iz Analize 3

11. januar 2010

1. Reši sistem  $y' = Ay$ , kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Poišči ekstremale funkcionala

$$I(y) = \int_0^{\pi/2} (5y^2 + y'^2 - y \sin x) dx.$$

ob pogojih  $y(0) = 0$ ,  $y(\pi/2) = 1$ .

3. Najdi geodetke na stožcu  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $z > 0$ . V posebnem primeru nalogo reši za pot od  $(1,0,1)$  do  $(3,4,5)$ . Lahko poskusiš reševati v cilindričnih koordinatah.
4. Naj bo  $q$  zvezna absolutno integrabilna funkcija na  $\mathbb{R}$ ,  $y$  pa naj bo omejena  $C^2$  rešitev enačbe  $y'' + qy = 0$ .
- a) Dokaži, da je  $\lim_{x \rightarrow \infty} y'(x) = 0$ .
- b) Dokaži, da obstaja neomejena rešitev dane diferencialne enačbe.

Namig: determinanta Wronskega.

Trditev b) lahko dokazuješ ob privzetku trditve a).

**Odgovore dobro utemelji.**