

# ANALIZA 3 - 1. kolokvij

1. 12. 2011

Ime in priimek:

Vpisna št.:

1. [25] Poišči splošno rešitev naslednje NDE

$$(1 + xy + y^3) dx + (2y + x^2 + xy^2) dy = 0,$$

če veš, da je integrirajoči množitelj oblike  $\mu(x, y) = f(x + y^2)$ , pri neki (gladki) funkciji  $f = f(z)$ .

2. [25] Poišči rešitev naslednje NDE

$$y''' = y^2 y',$$

ki zadošča pogojem  $y(0) = 1, y'(0) = 1/\sqrt{6}, y''(0) = 1/3$ .

3. Naj bosta  $R, l > 0$ . Na začetku na točki  $(0, R)$  miruje motorni čoln. Nanj je z vrvjo dolžine  $l$  privezan smučar na vodi, ki miruje na točki  $(0, R + l)$ . V danem trenutku se začne čoln premikati v pozitivni smeri po krožnici radija  $R$  s središčem v koordinatnem izhodišču in pri tem vleči smučarja za sabo. Če pri tem vrv med smučarjem in čolnom ves čas ostane napeta (ter dolžine  $l$ ), imenujemo krivuljo, po kateri potuje smučar *krožna traktrisa*. Naj bo  $y = y(x)$  funkcija, čigar graf podaja začetni segment krožne traktrise.

(a) [10] Zapiši NDE in začetni pogoj, ki jima zadošča  $y = y(x)$ .

(b) [10] Iz (a) izpelji, da sta NDE in začetni pogoj za krožno traktriso v polarnih koordinatah ( $r = r(\varphi)$ )

$$R^2 - l^2 - r^2 = \frac{2lr \frac{dr}{d\varphi}}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}}, \quad r(0) = R + l.$$

(c) [10] Reši NDE iz (b) za primer  $R = l$ .

4. [25] Naj bosta  $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$  in velja

$$f(x, y)x + g(x, y)y = 0, \quad \forall (x, y) \in S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Dokaži, da ima Cauchyjeva naloga (za funkciji  $x = x(t), y = y(t)$ )

$$\dot{x} = f(x, y),$$

$$\dot{y} = g(x, y),$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0,$$

rešitev na celem  $\mathbb{R}$ , če je  $x_0^2 + y_0^2 < 1$ .