

Tretji izpit iz Analize 3

31. avgust 2010

1. Reši enačbo $xy \, dy - y^2 \, dx = x\sqrt{x^2 - y^2} \, dx$.
2. K družini krivulj $4y + x^2 + 1 + ce^{2y} = 0$, $c \in \mathbb{R}$, poišči ortogonalno družino.
3. Določi vrednosti $c \in \mathbb{R}$, pri katerih za vse neničelne rešitve enačbe $y'' + (1 - 2c)y' + c(c - 1)y = 0$ velja
 - (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$
 - (b) $\limsup_{x \rightarrow \infty} |y(x)| = \infty$.
4. Reši sistem $y' = Ay$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

in sicer ob začetnem pogoju $y(0) = [-2, 1, 1]^T$.

Odgovore dobro utemelji.

Izpit iz Analize 3

10. junij 2010

1. Poišči vse rešitve enačbe $2x^2y' + y = 1$

(a) na $(0, \infty)$

(b) na \mathbb{R} .

2. Družini krivulj $y = x - 1 + ce^{-x}$ najdi ortogonalno družino.

3. Dokaži Gronwallovo neenakost:

Če je g zvezna realna funkcija na intervalu $[0, a]$ (ne nujno odvedljiva), za katero ob neki konstanti C velja

$$g(t) \leq C + \int_0^t g(s) ds$$

za $t \in [0, a]$, tedaj je

$$g(t) \leq Ce^t.$$

Nasvet: obravnavaj funkcijo $y(t) = \int_0^t g(s) ds$.

4. Poišči ekstremale funkcionala

$$I(y) = \int_1^2 (x^2 y'^2 + 2y^2) dx.$$

pri pogojih $y(1) = 0$, $y(2) = 1$.

Odgovore dobro utemelji.

Izpit iz Analize 3

11. januar 2010

1. Določi enačbo zrcala, ki svetlobne žarke, prihajajoče iz izhodišča, odbije v smeri vektorja $(-1,0)$.
2. Reši enačbo $y'^3 + y^2 = xy y'$.
3. Reši sistem $y' = Ay$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Imejmo $n \in \mathbb{N}$, matriko $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ter vektorski podprostor Y v \mathbb{R}^n , ki je invarianten za A . Če vektorska funkcija $x(t)$ reši enačbo $\dot{x} = Ax$ ob začetnem pogoju $x(0) \in Y$, pokaži, da $x(t) \in Y$ za vsak $t \in \mathbb{R}$.

Odgovore dobro utemelji.

4. izpit iz Analize 3 (3. letnik PM-TM-UM)

18. september 2009

1. Reši enačbo $3x^2y^2 dx + (y^4 \log y - 2x^3y) dy = 0$.

Išči integrirajoči množitelj, ki je odvisen samo od y .

2. Reši sistem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2t(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= 4txy.\end{aligned}$$

3. Poišči konstante a, b, c, d , ki niso vse enake nič, tako da za vsako rešitev enačbe $y''' - y = 0$, ki zadošča pogoju $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$, velja

$$ay(0) + by'(0) + cy''(0) = d.$$

4. S pomočjo Laplaceove transformacije reši enačbo $y'' + 3y' + 2y = 2x^2 + 1$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$.

Odgovore dobro utemelji.

3. izpit iz Analize 3 (3. letnik PM-TM-UM)

4. september 2009

1. Poišči tisto rešitev enačbe

$$y'x^2 \cos \frac{1}{x} = y \sin \frac{1}{x} - 1,$$

za katero velja $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 1$.

2. Imejmo enačbo

$$y' + py = 0. \quad (1)$$

Dokaži ekvivalenco trditev:

- (a) Prostor rešitev za (??) je translacijsko invarianten.
- (b) Koeficient p je konstanten.

Pogoj (a) pomeni, da za vsako rešitev f enačbe (??) in vsak $t \in \mathbb{R}$ funkcija $x \mapsto f(x+t)$ spet reši (??).

3. V okolici točke 0 s pomočjo Frobeniusove metode najdi vse rešitve enačbe $xy'' + 4y' - xy = 0$.
4. Naj bo A gladka funkcija, ki slika iz \mathbb{R} v prostor $n \times n$ realnih matrik. Dana naj bo takšna konstanta $C > 0$, da je $\langle A(t)y, y \rangle \leq C$ za vsak $t \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\|y\| \leq 1$. Privzemimo, da vektorsko polje x reši enačbo $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. Dokaži, da za vsak $t \in \mathbb{R}_+$ velja $\|x(t)\| \leq e^{Ct}\|x(0)\|$.
- Nasvet: odvajaj funkcijo $z(t) = \|x(t)\|^2$.

Odgovore dobro utemelji.

Izpit iz Analize 3

24. junij 2009

1. Reši enačbo $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$, $x > 0$. Kaj so singularne rešitve zanjo?
2. Naj bo funkcija y poljubna rešitev enačbe $y'' + y' + y^3 = 0$. Pokaži, da je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} y'(x) = 0.$$

Lahko dokazuješ po naslednjih korakih:

- Izračunaj z' , kjer je $z = (y + y')^2 + y'^2 + y^4$.
 - Pokaži, da ima $z(x)$ limito za $x \rightarrow \infty$.
 - Privzemi, da je ta limita neničelna in odtod izpelji, da mora biti $y'^2(x) + y^4(x) > \varepsilon$ za velike x .
 - Izrazi $z(t)$ s pomočjo primerne integrala in pridi do protislovja.
3. V okolici točke 0 zapiši vse rešitve enačbe $9x(1-x)y'' - 12y' + 4y = 0$.
 4. Nariši ekstremalo funkcionala

$$I(y) = \int_1^3 y^2(1-y')^2 dx, \quad y(1) = y(3) = 2.$$

Odgovore dobro utemelji.

Izpit iz Analize 3 (3. letnik PM-TM-UM)

10. junij 2009

1. Reši enačbo $y' + y^2 - 2y \sin x + \sin^2 x - \cos x = 0$.

Nasvet: najprej ugani eno rešitev.

2. Dokaži, da ima enačba

$$y' = 3xy + \frac{y}{1+y^2}, \quad y(0) = 1$$

natanko eno rešitev na intervalu $[0, 1]$.

3. Imejmo sistem $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Reši ta sistem brez substitucije (torej brez prevedbe na enačbo 2. reda).

4. Naj bo q realni polinom, a, b, c pa enako predznačena neničelna realna števila. Imejmo enačbo

$$ay'' + by' + cy = q(x)e^{-x^2}.$$

Pokaži, da je vsaka rešitev te enačbe absolutno integrabilna na $(0, \infty)$ v izlimitiranem smislu.

Navodilo:

- (a) Pokaži, da lahko privzamemo, da so a, b, c pozitivna števila.
- (b) Najprej reši enačbo za primer $q = 0$.
- (c) S pomočjo točke (b) zapiši rešitev enačbe za splošen q .
- (d) Pokaži, da je rešitev integrabilna. (Pri točkah (b) in (c) se pojavi več različnih primerov; dovolj je, če natančno obravnavaš enega.)

Odgovore dobro utemelji.