

1. veraja;  
2. naloga kramje  
opremljena v  
(homogeno) linearno

### 3. izpit iz Analize 3 (3. letnik PM-TM-UM)

4. september 2009

1. Poišči tisto rešitev enačbe

$$y'x^2 \cos \frac{1}{x} = y \sin \frac{1}{x} - 1,$$

za katero velja  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 1$ .

2. Imejmo enačbo

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (1)$$

Dokaži ekvivalenco trditev:

- (a) Prostor rešitev za (1) je translacijsko invarianten.
- (b) Koeficienta  $p, q$  sta konstantna.

Pogoj (a) pomeni, da za vsako rešitev  $f$  enačbe (1) in vsak  $t \in \mathbb{R}$  funkcija  $x \mapsto f(x+t)$  spet reši (1).

3. V okolici točke 0 s pomočjo Frobeniusove metode najdi vse rešitve enačbe  $xy'' + 4y' - xy = 0$ .
4. Naj bo  $A$  gladka funkcija, ki slika iz  $\mathbb{R}$  v prostor  $n \times n$  realnih matrik. Dana naj bo takšna konstanta  $C > 0$ , da je  $\langle A(t)y, y \rangle \leq C$  za vsak  $t \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|y\| \leq 1$ . Privzemimo, da vektorsko polje  $x$  reši enačbo  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ . Dokaži, da za vsak  $t \in \mathbb{R}_+$  velja  $\|x(t)\| \leq e^{Ct}\|x(0)\|$ .
- Nasvet: odvajaj funkcijo  $z(t) = \|x(t)\|^2$ .

Odgovore dobro utemelji.

## Izpit iz Analize 3

12. februar 2009

1. Določi enačbo zrcala, ki svetlobne žarke, prihajajoče iz izhodišča, odbije v smeri vektorja  $(-1, 0)$ .

*yf. izpit 11.1.2010*

2. Reši enačbo  $2y = 3xy' + 2e^{y'}$ .

*y' = p*

3. Imejmo sistem enačb

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - 4y \\ \dot{y} &= bx + 2y\end{aligned}$$

- (i) Določi potrebne in zadostne pogoje na konstanti  $a, b$ , da bo vsaka rešitev zgornjega sistema periodična.
- (ii) Izberi si poljuben (konkreten) par  $(a, b)$ , ki zadošča pogoju iz prejšnje točke, in zanj eksplicitno reši sistem.
4. S pomočjo Laplaceove transformacije reši enačbo

$$xy'' + (3x - 1)y' - (4x + 9)y = 0$$

ob pogoju  $y(0) = 0$ .

Prvi izpit iz Analize 3

6. junij 2008

1. Reši enačbo  $x^2y^3 + y + (x^3y^2 - x)y' = 0$ .
2. Naj za realno  $3 \times 3$  matriko  $A$  velja  $A^t = -A$ . Privzemimo, da funkcija  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  zadošča diferencialni enačbi

$$\frac{dX}{dt}(t) = AX(t).$$

- (a) Pokaži, da je  $\|X(t)\|$  neodvisna od  $t$ .
  - (b) Pokaži, da če je  $v \in \ker A$ , potem je tudi  $X(t)v$  neodvisen od  $t$ .
  - (c) Izračunaj  $\det A$ .
  - (d) S pomočjo prejšnjih točk izpelji, da je zaloga vrednosti funkcije  $X$  vsebovana v neki krožnici v  $\mathbb{R}^3$ .
3. Določi potrebne in zadostne pogoje za števila  $a, b, c$ ;  $a \neq 0$ , da bo vsaka rešitev diferencialne enačbe

$$ay'' + by' + cy = (5x^2 - 3)e^{-x^2/2}$$

omejena na  $\mathbb{R}$ .

4. S pomočjo Laplaceove transformacije reši enačbo

$$xy'' + (3x - 1)y' - (4x + 9)y = 0$$

ob pogoju  $y(0) = 0$ .

**Odgovore dobro utemelji.**

Drugi izpit iz Analize 3  
24. junij 2008

1. Poišči funkcije  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ , ki zadoščajo naslednjemu pogoju. Izberimo poljuben  $x > 0$ . Naj bo  $P$  pravokotnik s stranicama dolžine  $x$  ter  $y_0$ , kjer točka  $(0, y_0)$  leži na tangenti na graf funkcije  $f$  v točki  $x$ . Ploščina  $P$  naj bo enaka  $3/4$  ploščine lika med abscisno osjo in krivuljo  $y = f(t)$  za  $t \in (0, x)$ .

2. Reši enačbo  $(3xy^2 - y) dx + (x + 2y + y^2) dy = 0$ .

Nasvet: lahko poskusiš najti integrirajoči množitelj; le-ta je odvisen zgolj od ene spremenljivke.

3. Reši sistem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y + z \\ \dot{y} &= -x + 2y \\ \dot{z} &= -x + y + z\end{aligned}$$

4. S pomočjo Laplaceove transformacije reši enačbo

$$xy'' + 3xy' - 3y = 0$$

ob pogoju  $y(0) = 0$ . Upoštevaj, da po Laplaceovi transformaciji enačba še vedno ostane diferencialna, le da prvega reda.

**Odgovore dobro utemelji.**

Tretji izpit iz Analize 3  
27. avgust 2008

1. V polnem stolitrskem kotlu, imenujmo ga  $K_0$ , je 20-odstotna raztopina soli. Vanj s hitrostjo 7l na minuto priteka voda, izpodrinjena tekočina pa se preliva v drugi kotel,  $K_1$ . Le-ta je na začetku napolnjen z vodo, presežek pa se izliva stran. Po kolikšnem času je koncentracija soli v  $K_1$  največja in koliko tedaj znaša?

Bonus [15 točk]: Denimo, da imamo dodatne kotle  $K_2, \dots, K_n$ , med seboj povezane na analogen način. Kako se koncentracija soli v  $K_n$  spreminja s časom?

2. Reši enačbo

$$y = \log(1 + y'^2).$$

3. Klasificiraj singularne točke enačbe

$$(1 - z^2)y'' - 2zy' + 2y = 0$$

in poišči rešitev te enačbe okrog točke 0.

4. Naj bo  $n \in \mathbb{N}$  ter  $a, b, c > 0$ . Napiši hipergeometrično enačbo, katere rešitev je  $\frac{d^n}{dz^n} F(a, b, c; z)$ .

Odgovore dobro utemelji.

Prvi izpit iz Analize 3  
6. junij 2008

1. Reši enačbo  $x^2y^3 + y + (x^3y^2 + x)y' = 0$ .
2. Naj za realno  $3 \times 3$  matriko  $A$  velja  $A^t = -A$ . Privzemimo, da funkcija  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  zadošča diferencialni enačbi

$$\frac{dX}{dt}(t) = AX(t).$$

- (a) Pokaži, da je  $\|X(t)\|$  neodvisna od  $t$ .
  - (b) Pokaži, da če je  $v \in \ker A$ , potem je tudi  $X(t) \cdot v$  neodvisen od  $t$ .
  - (c) Izračunaj  $\det A$ .
  - (d) S pomočjo prejšnjih točk izpelji, da je zaloga vrednosti funkcije  $X$  vsebovana v neki krožnici v  $\mathbb{R}^3$ .
3. Določi potrebne in zadostne pogoje za števila  $a, b, c$ ;  $a \neq 0$ , da bo vsaka rešitev diferencialne enačbe

$$ay'' + by' + cy = (5x^2 - 3)e^{-x^2/2}$$

omejena na  $\mathbb{R}$ .

4. S pomočjo Laplaceove transformacije reši enačbo

$$xy'' + (3x - 1)y' - (4x + 9)y = 0$$

ob pogoju  $y(0) = 0$ . Upoštevaj, da po Laplaceovi transformaciji enačba še vedno ostane diferencialna, le da prvega reda.

**Odgovore dobro utemelji.**

Prvi izpit iz Analize 3  
6. junij 2008

1. Reši enačbo  $x^2y^3 + y + (x^3y^2 + x)y' = 0$ .
2. Naj za realno  $3 \times 3$  matriko  $A$  velja  $A^t = -A$ . Privzemimo, da funkcija  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  zadošča diferencialni enačbi

$$\frac{dX}{dt}(t) = AX(t).$$

- (a) Pokaži, da je  $\|X(t)\|$  neodvisna od  $t$ .
  - (b) Pokaži, da če je  $v \in \ker A$ , potem je tudi  $X(t) \cdot v$  neodvisen od  $t$ .
  - (c) Izračunaj  $\det A$ .
  - (d) S pomočjo prejšnjih točk izpelji, da je zaloga vrednosti funkcije  $X$  vsebovana v neki krožnici v  $\mathbb{R}^3$ .
3. Določi potrebne in zadostne pogoje za števila  $a, b, c$ ;  $a \neq 0$ , da bo vsaka rešitev diferencialne enačbe

$$ay'' + by' + cy = (5x^2 - 3)e^{-x^2/2}$$

omejena na  $\mathbb{R}$ .

4. S pomočjo Laplaceove transformacije reši enačbo

$$xy'' + (3x - 1)y' - (4x + 9)y = 0$$

ob pogoju  $y(0) = 0$ . Upoštevaj, da po Laplaceovi transformaciji enačba še vedno ostane diferencialna, le da prvega reda.

**Odgovore dobro utemelji.**