

Tretji kolokvij iz Analize 3
28. marec 2008

1. S pomočjo metode variacije konstant reši enačbo

$$x^3(y'' - y) = x^2 - 2.$$

(V spodbudo: čeprav morda na začetku ne kaže, je rešitev elementarna.)

2. Na intervalu $[1, T]$ rešujemo enačbo

$$y'' = -\frac{3}{x^2} y$$

ob robnih pogojih $y(1) = y(T) = 0$. Za katere $T > 1$ imamo tudi netrivialno rešitev?

3. [5+20]

- (a) Ob izbranem $n \in \mathbb{Z}$ je podana enačba

$$e^{1/z} y'' + z^n y' - 4e^{1/z} y = 0.$$

Razišči regularnost oz. singularnost izhodišča.

- (b) V okolici izhodišča reši enačbo

$$2z^2 y'' - z(1 + 2z)y' + (1 + 4z)y = 0.$$

4. Pokaži, da obstaja takšna rešitev $\vec{r}(t)$ sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= 2x + 3z \\ \dot{z} &= 4y - 5x,\end{aligned}$$

za katero velja

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |\vec{r}(t)| = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\vec{r}(t)| = 0.$$

Odgovore dobro utemelji.

Tretji kolokvij iz Analize 3
30. marec 2009

1. Naj $\mathbf{x}(t)$ reši sistem $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 7 & 2 \\ -3 & -8 & 4 \end{bmatrix}.$$

Dokaži, da se, potujoč po krivulji $\mathbf{x}(t)$, s časom čedalje bolj oddaljujemo od izhodišča.

2. Reši sistem $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. V okolici izhodišča reši nalogo

$$z^2 y'' + (z^2 - z)y' + y = 0.$$

4. Imejmo kompleksni števili $a, b \in \mathbb{C}$, pozitivni števili δ, ε ter biholomorfno preslikavo $\varphi : B(a, \delta) \rightarrow B(b, \varepsilon)$, ki eno središče slika v drugo. Naj bo u dvakrat odvedljiva na $B(b, \varepsilon)$. Privzemimo, da funkcija $v := u \circ \varphi$ reši diferencialno enačbo

$$v'' + pv' + qv = 0 \tag{1}$$

v okolici točke a .

- (i) Najdi homogeno linearno diferencialno enačbo 2. reda, ki jo funkcija u reši v okolici točke b .
- (ii) Če je točka a pravilna singularnost za (1), pokaži, da je točka b pravilna singularnost za enačbo iz prejšnje vrstice.
- (iii) Ugotovi, ali se pri opisani transformaciji nujno ohranjajo karakteristični eksponenti.

Odgovore dobro utemelji.

Četrty kolokvij iz Analize 3
16. maj 2008

1. Naj bo $p \geq 2$ in naj bo q konjugirani eksponent k p , torej

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Z a_n označimo n -ti člen v Taylorjevem razvoju hipergeometrične funkcije $F(1, q^{-1}, p^{-1}; z)$ okrog točke 0. Dokaži oceno

$$a_n \leq n^\delta (p-1),$$

kjer je $\delta = 1 - 2/p$. Upoštevaj naslednje korake:

- (a) Pokaži, da zadošča preveriti

$$\frac{k+1/q}{k+1/p} \leq \left(\frac{k+1}{k}\right)^\delta \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

- (b) S pomočjo substitucije $w^{-1} = 2k+1$, $t^{-1} = \delta$ prevedi (1) na

$$t \log \frac{t+w}{t-w} \leq \log \frac{1+w}{1-w}.$$

- (c) Preveri, da velja

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(t \log \frac{t+w}{t-w} \right) < 0$$

in končaj dokaz.

2. Definirajmo operatorje M, A, B takole:

$$Mf(x) = e^{x^2/2} f(x), \quad Af(x) = xf(x) - f'(x), \quad \text{ter } B = MAM^{-1}.$$

Če je H_n Hermiteov polinom reda n (oznake kot na vajah), izračunaj BH_n .

3. Če z J_n označimo Besselovo funkcijo z indeksom $n \in \mathbb{N}$, preveri zvezo

$$(xJ_n(x)J_{n+1}(x))' = x(J_n(x)^2 - J_{n+1}(x)^2).$$

4. Poišči ekstremalo funkcionala

$$I(y) = \int_0^{\pi/2} [y^2 + 2xyy' + (1 + \cos x)y'^2] dx,$$

ob robnih pogojih $y(0) = 3$, $y(\pi/2) = 2$.

Odgovore dobro utemelji.

Četrti kolokvij iz Analize 3
1. junij 2009

1. Za $x \in \mathbb{R}$, $w \in \mathbb{C}$, $|w| < 1$, definiramo

$$f(x, w) = \frac{e^{2xw-w^2}}{w-1}.$$

Izračunaj

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial w^n}(x, 0).$$

2. Dokaži, da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_{2n}(z) = \frac{z^2}{8}.$$

3. S pomočjo Laplaceove transformacije reši enačbo

$$y'' - 4y' + 5y = 2e^{2x}(\sin x + \cos x)$$

ob robnih pogojih $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

4. Po kateri poti najhitreje pridemo iz točke $(1,0)$ v točko $(1/2, 1/2)$, če je hitrost potovanja obratno sorazmerna z oddaljenostjo od izhodišča?

Odgovore dobro utemelji.