

Pravična delitev

- O pravični delitvi se pišejo članki, knjige.

An Envy-Free Cake Division Protocol

Steven J. Brams and Alan D. Taylor

Our starting point is the well-known parental solution to the problem of dividing a cake between two children so that each child thinks he or she has been treated fairly: The parent instructs one of the children to cut the cake into two pieces in any way he desires. The other child is then instructed to choose whichever piece she prefers. This two-step sequence of instructions, known as "cut-and-choose," provides a simple example of the kind of game-theoretic algorithm that Even and Paz [11] call a "protocol."

Associated with the cut-and-choose protocol is a natural strategy for each child: The first child cuts the cake into two pieces that he considers to be equal, and the second child chooses a piece that she considers to be at least as large as the other piece. Notice that each child's strategy guarantees him or her "satisfaction," regardless of what the other child does.

The general version of this problem involves n people ("players"), each of whom has his or her preferences over subsets of the cake given by a probability measure.¹ An allocation of the cake among the players is said to be *proportional* if each player receives a piece of size at least $1/n$ (in his or her own measure), and it is said to be *envy-free* if each player receives a piece he or she would not swap for that received by any other player. It is easy to see that an envy-free allocation is proportional, but the converse fails unless $n = 2$. Thus, for example, every one of three players may think his or her piece is at least $1/3$, but a player may think that one of the other players has a larger piece.

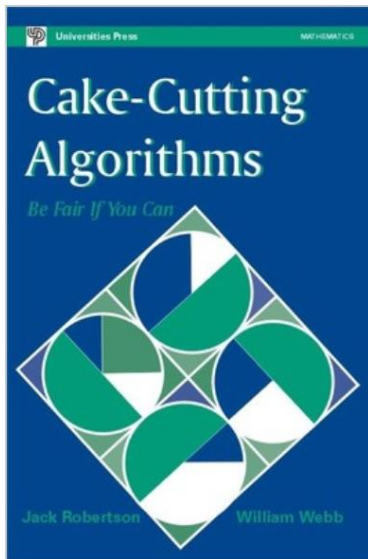
The results on proportional and envy-free allocations obtained over the past 50 years tend to fall into one of four classes: (i) Existence Theorems; (ii) Moving-Knife Solutions; (iii) Algorithms; and (iv) Protocols. We say something about each in turn.

Existence theorems, dating back to the 1940s, are often based on some version of Liapounoff's Convexity Theorem [20]. Typically, they establish the existence of an ordered partition of the cake corresponding to an envy-free allocation, often with some additional property such as: all the measures of all the pieces are exactly $1/n$ [21]; or the pieces are connected sets [27 and 31]; or the allocation is also Pareto-optimal [30 and 4]. In the words of Rehrman [24, p. 33], however, these results provide "no clue as to how to accomplish such a wonderful partition."

There are two well-known moving-knife solutions. The first is due to Dubins and Spanier [10] and is a moving-knife version of the Banach-Knaster last-

¹If one wants to abandon the cake metaphor, and literally work with arbitrary probability measures on some set C , then even cut-and-choose can fail. For example, if both children have their preferences given by the same 0-1 valued measure, i.e., the same ultrafilter, then both will want the same piece regardless of how the cake is divided.

For everything we do in the present paper, it suffices to assume that our measures are all defined on the same algebra $\mathcal{A}$ of subsets of C and satisfy the following two properties: (i) for every set $P \in \mathcal{A}$ and every finite k , P can be partitioned into k sets of equal measure, and (ii) for every $P, Q \in \mathcal{A}$, either P can be trimmed to yield a subset the same size as Q , or vice-versa.



Osnovni pojmi

- Stvari, ki naj bi jih delili: kolač (torta), posest, umetnine, premičnine, ... Denar ni predmet postopkov deljenja, opisanih v nadaljevanju.
- Stvari delimo na: zvezno deljive in nedeljive. Nedeljivo stvar mora v celoti prevzeti en igralec.
- Igralci: osebe, skupine oseb, stranke, države, ...
- Vrednotenje stvari: vsak igralec ima svoj sistem vrednotenja.
- Proporcionalna delitev: vsak izmed n igralcev meni, da je dobil n -ti del kolača.
- Delitev brez zavisti (*envy free division protocol*): vsak igralec meni, da nihče ni dobil več, kot on sam.

Predpostavke

- Racionalnost igralcev.
- Tvrno sodelovanje. Vsak igralec brezpogojno sprejme pravila igre, zato ni zunanjih arbitrov.
- Tajnost. Vrednotenja drugih igralcev niso znana, dokler jih le-ti namenoma ne objavijo.
- Enakost med igralci. Vsak ima pravico dobiti enak delež.

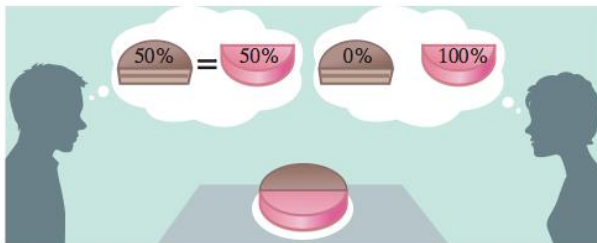
Nekateri načini proporcionalnih delitev

- Predmet delitve je zvezno deljiv, do infinitezimalnih delcev:
 - 2 igralca: prvi reže, drugi izbira (*the divider-chooser method*),
 - 3 ali več igralcev: metoda enega delilca (*the lone divider meth.*),
 - 3 ali več igralcev: metoda enega izbiralca (*the lone chooser method*),
 - 3 ali več igralcev: Banach-Knaster proporcionalni protokol (*the last diminisher method*).
- Razdeliti je potrebno več stvari; ki pa vsaka zase ni deljiva:
 - metoda zapečatenih ponudb (*the method of sealed bids*),
 - metoda zaznamkov (*the method of markers*).

Metoda reži in izberi za dva igralca

Primer 1: delitev čokoladno-jagodne torte

- Vrednotenje torte (tajno): ON: 50% +50%, ONA: 0% +100%



- Žrebanje vlog: delilec, izbiralka.

Vir vseh slik v nadaljevanju: [1]

- ON: reže torto na (zanj) dva enaka dela.



- ONA: izbere del z večjim jagodnim delom.
- Vtisi po opravljeni delitvi:
 - ON: zadovoljen, dobi $\frac{1}{2}$ torte, brez zavisti, ker je ONA ni dobila več od njega.
 - ONA: prezadovoljna, dobi $\frac{2}{3}$ vrednosti torte, brez zavisti, ker je ON (po njeno) dobil manj od nje.
- Končni rezultat: delitev je poštena in brez zavisti, oba igralca dobita vsaj 50% vrednosti torte.

Metoda enega delilca za tri igralce

- 1943, Steinhaus: razširitev metode reži in izberi na 3 igralce, Kuhn metodo razširi na $N > 3$ igralcev.
- En delilec (D), dva izbiralca (C_1 in C_2).
- Postopek:
 - 1) D deli torto na tri zanj enake dele S_1 , S_2 in S_3 .
 - 2) C_1 in C_2 napišeta ločeni preferenčni listi. Na listi so navedeni deli torte, za katere menita, da so vredni vsaj $1/3$ torte.
 - 3) Pregled preferenčnih list:
 - Če sta na listah najvišje točkovana dva različna S, dobita C_1 in C_2 vsak svojega (glede na preference), D dobi tretjega.

- Če je na obeh listah najvišje točkovan isti S, D izbere enega izmed preostalih dveh S-jev. Kar ostane (skupni preferenčni S ter S, ki ga D ni izbral), C_1 in C_2 združita v nov del B in ga nato delita po metodi reži in izberi.

Primer 2: delitev torte na tri dele, različni preferenci

- Vrednotenje torte:

	S_1 [%]	S_2 [%]	S_3 [%]
D	33,33	33,33	33,33
C_1	35	10	55
C_2	40	25	35

- Delitev: C_1 dobi S_3 , C_2 dobi S_1 , D dobi S_2 .
- Končni rezultat: delitev je poštena in brez zavisti, vsi trije igralci so dobili vsaj $1/3$ vrednosti torte.

Primer 3: delitev torte na tri dele, enaki preferenci

- Vrednotenje torte:

	S_1 [%]	S_2 [%]	S_3 [%]
D	33,33	33,33	33,33
C_1	20	30	50
C_2	25	15	60

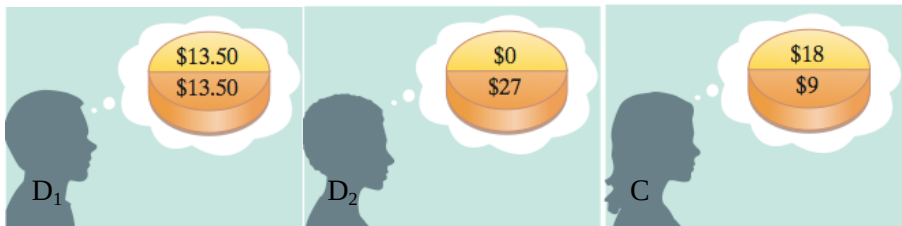
- Na obeh preferenčnih listah je najvišje uvrščen S_3 .
- Delitev: D izbira med S_1 ali S_2 (izbere npr. S_1). S_2 in S_3 sestavijo v B, ki ga delita C_1 in C_2 na pol. Tako D dobi 33,33%, C_1 $(30\%+50\%)/2=40\%$, C_2 pa $(15\%+60\%)/2=37,5\%$ vrednosti torte.
- Končni rezultat: delitev je poštena in brez zavisti, vsi trije igralci so dobili vsaj $1/3$ vrednosti torte.

Metoda enega izbiralca za tri igralce

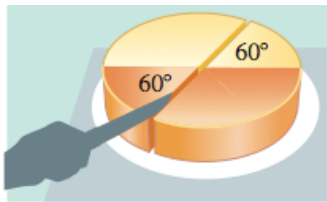
- 1964, Fink.
- En izbiralec (C), dva delilca (D_1 in D_2).
- Postopek:
 - 1) D_1 in D_2 delita torto na DVA dela S_1 in S_2 po metodi reži in izbiraj.
 - 2) D_1 in D_2 delita vsak svoja deleža, neodvisno drug od drugega, na tri dele (S_{1a} , S_{1b} , S_{1c} , S_{2a} , S_{2b} , in S_{2c}).
 - 3) C izbere enega izmed S_{1a} , S_{1b} , S_{1c} in enega izmed S_{2a} , S_{2b} , S_{2c} .
 D_1 in D_2 pa ohranita dva izmed treh delov, ki sta jih sama odrezala.

Primer 4: delitev pomarančno-ananasove torte

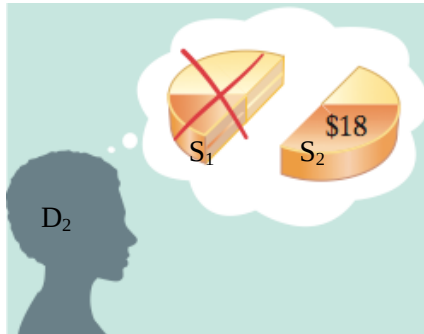
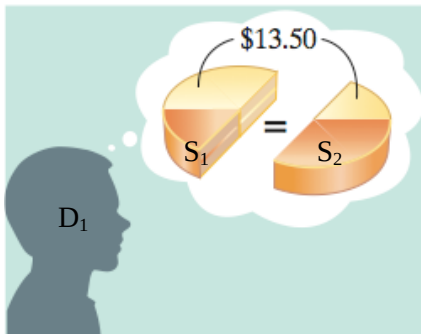
- Vrednotenje torte (tajno):



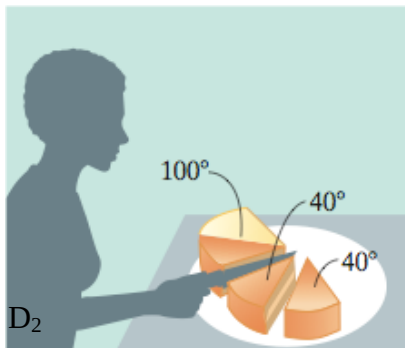
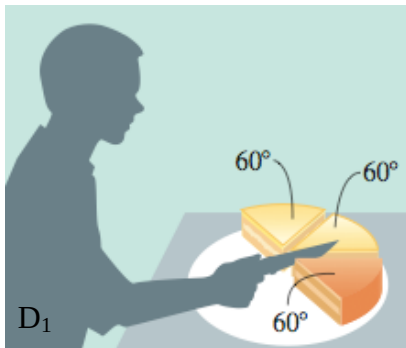
- Delitev med D₁ in D₂:



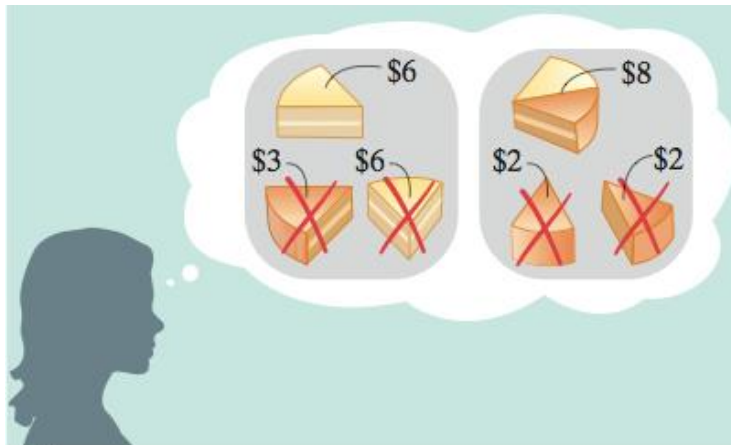
• Izbira delov:



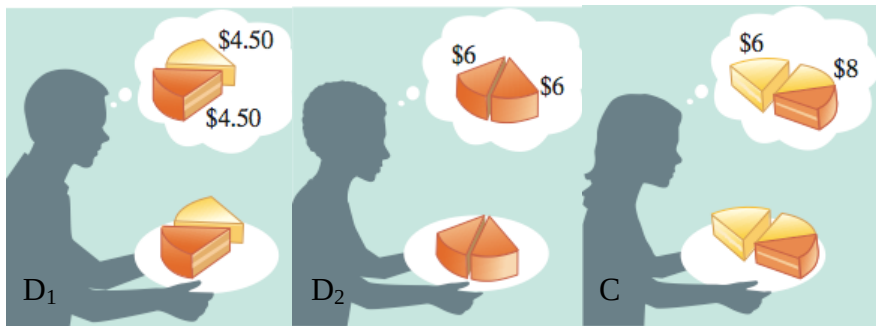
- Delitev na poddele:



- C izbira po en del pri D_1 in D_2 :



- Končni rezultat: delitev je poštena in brez zavisti, vsi trije igralci so dobili vsaj $1/3$ vrednosti torte.



Metoda enega izbiralca za $N > 3$ igralcev

- Razširitev metode na N igralcev.
- En izbiralec (C), delilci ($D_1, D_2, \dots, D_{N-1}$).
- Postopek:
 - 1) Delilci razdelijo torto na $N-1$ delov.
 - 2) Vsak delilec razdeli svoj del na N delov.
 - 3) C izbere pri vsakem delilcu en kos.

Metoda Banach-Knaster

- cca. 1940, za tri ali več igralcev.

- Postopek:

- 1) Izžreba se vrstni red igralcev.
- 2) Prvi igralec določi svoj proporcionalni del ($1/N$ – ti del torte).
- 3) Vsak naslednji igralec ima pravico prvemu zmanjšati njegov del. S tem ta igralec (neprvi) postane lastnik koščka.
- 4) Košček ostane tistemu igralcu, ki ga je zadnji manjšal. Ta igralec izstopi iz igre. Če ga ni manjšal nihče, ostane prvemu igralcu.
- 5) Torta je manjša za $(1/N)$ -ti del. Naslednji igralec po vrsti izreže svoj del od ostanka torte ($1/(N-1)$).

- 6) Ponoviti točke 3 in 4.
- 7) Torta je manjša za $(2/N)$ -ta dela. Naslednji igralec po vrsti izreže svoj del od ostanka torte $(1/(N-2))$.
- 8) Postopek se ponavlja dokler ne ostaneta samo še dva igralca. Ta dva si delita preostanek po metodi reži in izbiraj.

Delitev nedeljivih predmetov

- Vsak nedeljiv predmet mora v celoti prejeti le en igralec.
- Delitev je proporcionalna, v osnovni izvedbi pa ni vedno brez zavisti.

Metoda zapečatenih ponudb

- 1948: Steinhaus - Knasterjev postopek zapečatenih ponudb.
- Metoda primerna za delitev manjšega števila predmetov, ki so lahko tudi zelo različni po vrednosti.
- Poštena delitev več nedeljivih predmetov je možna samo z uporabo dodatnih menjalnih sredstev zvezne narave, npr., z denarjem.

• Postopek:

- 1) Vsak igralec v zaprti kuverti poda svoje vrednotenje za vsak predmet. Predpostavlja se tajnost.
- 2) Po razgrnitvi ponudb dobijo posamezne predmete ponudniki, ki so za predmet ponudili največ.
- 3) Igralec, ki je pridobil predmete v skupni vrednosti, večji od igralčevega proporcionalnega deleža, mora povrniti denarno nadomestilo za povečano vrednost v skupno blagajno.
- 4) Igralec, ki je pridobil predmete v skupni vrednosti, manjši od igralčevega proporcionalnega deleža, prejme denarno nadomestilo za zmanjšano vrednost iz skupne blagajne.
- 5) Morebiten ostanek denarja v skupni blagajni delijo vsi igralci proporcionalno.

Primer 5: delitev zapuščine

- Dediči: A, B, C. Zapuščina P_1, P_2, P_3, P_4 .
- Vrednotenje zapuščine (tajno):

	P_1	P_2	P_3	P_4	Vrednost dediščine
A	300	80	100	90	570
B	50	320	170	60	600
C	250	200	180	90	720

- Predmet P_1 dobi A, P_2 dobi B, P_3 dobi C, P_4 pa, po dogovoru ali žrebu med A in C, dobi npr. A.

- Izračun denarnih nadomestil:

	proporcionalni delež	dobi s predmeti	plača	dobi
A	190	390	200	0
B	200	320	120	0
C	240	180	0	60
Vsota			320	60

- Razlika med vplačili in izplačili iz skupne blagajne je 260. To razliko si A, B in C proporcionalno in brez zavisti razdelijo. To poplačilo ni predmet naslednjih preverjanj.

- Preverjanje morebitne zavisti:

Mnenje dediča	o dediču		
	A	B	C
A	190	$80-120 = -40$	$100+60 = 160$
B	$50+60-200 = -90$	200	$170+60 = \mathbf{230}$
C	$250+90-200 = 140$	$200-120 = 80$	240

- Dedič B zavida dediču C, da je dobil 30 več kot B ($230-200$):
- Komentar: Ker igralec v naprej ne ve ali bo plačnik ali prejemnik iz skupne blagajne, ga to sili v poštenost, ker:
 - 1) če igralec podceni vrednosti, lahko na koncu dobi malo premoženja, manj od nekega razumnega povprečja;
 - 2) če vrednosti preceni, plačuje veliko za stvari, ki morda niso toliko vredne.

Primer 6: delitev zapuščine z nerealnim vrednotenjem

- Vrednotenje zapuščine (tajno):

	P_1	P_2	P_3	P_4	Vrednost dediščine
A	300	80	100	90000	90480
B	50	320	170	60	600
C	250	200	180	90	720

- Izračun denarnih nadomestil:

	proporcionalni delež	dobi s predmeti	plača	dobi
A	30160	90300	60140	0
B	200	320	120	0
C	240	180	0	60
Vsota			60260	60

- Komentar: Vsak od dedičev dobi še 20067 iz skupne blagajne. B in C se je izplačalo, da je A precenil P_4 .

- Vprašanje: kako bi se B izplačalo nastaviti ceno P_4 , če bi vnaprej vedel za ponudbo A (kršitev tajnosti)?

	P_1	P_2	P_3	P_4	Vrednost dediščine
A	300	80	100	90000	90480
B	50	320	170	89997	90537
C	250	200	180	90	720

	proporcionalni delež	dobi s predmeti	plača	dobi
A	30160	90300	60140	0
B	30179	320	0	29859
C	240	180	0	60
Vsota			60140	29919

- Komentar: B nepošteno (ker drugi ne vedo za kršitev tajnosti), vendar po pravilih igre (dokler drugi ne izvedo za kršitev tajnosti), dobi dodatnih 29979 glede na prejšnji primer, ko še ni vnaprej poznal ponudbe A.

Vsak od dedičev dobi 10074 iz skupne blagajne, kar je manj, kot v prejšnjem primeru, ko B ni poznal ponudbe A.

Metoda zaznamkov

- 1975: Lucas.
- Metoda primerna za delitev večjega števila predmetov, ki naj bodo približno enakih vrednosti. Predmetov naj bo znatno več, kot igralcev.
- Dodatnega denarja ni potrebno imeti.

• Postopek:

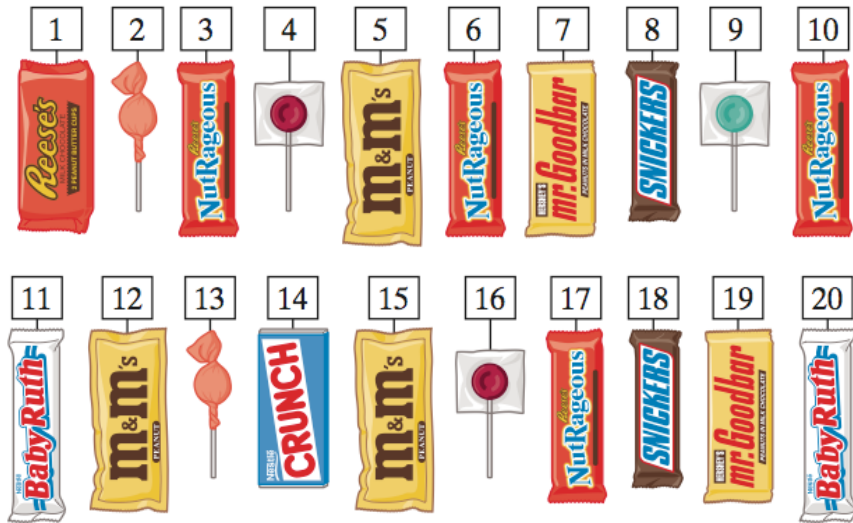
- 1) Predmete naključno postavimo v zaporedje, katerega vrstni red se pozneje ne spreminja več.
- 2) Vsak izmed N igralcev tajno razdeli zaporedje v N vrednostno enakih segmentov. Npr., na svojem papirju naredi zaznamke na zaporedju predmetov.
- 3) Zaznamki vseh igralcev se prenesejo na zaporedje predmetov.
- 4) Segmenti se glede na razporeditev zaznamkov dodelijo igralcem (glej primer).

Primer 7: delitev sladkarij

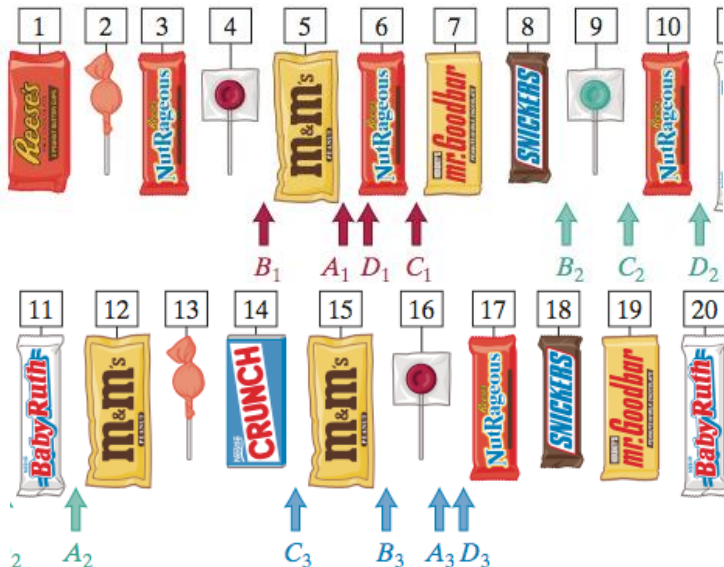
- Igralci A, B, C in D si želijo med seboj razdeliti 20 sladkih priboljškov (čokoladic, bombonov, itd.).
- Vsakemu igralcu bi pripadlo 5 kosov. Zaradi neenake vrednosti posameznih kosov bi bilo vsakršno žrebanje (posamično jemanje sladkarij iz vreče) po vsej verjetnosti neporocionalno in bi povzročalo zavist.



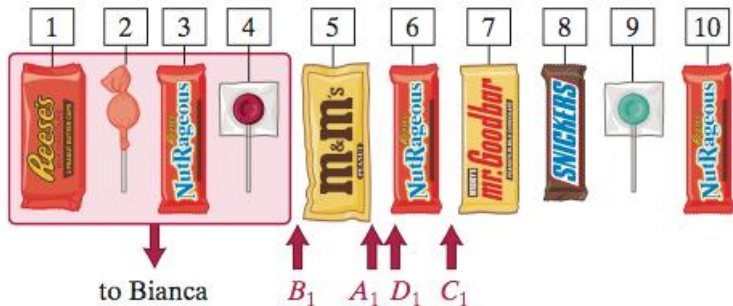
1) 20 predmetov naključno razvrstimo



2 in 3) Igralci neodvisno eden od drugega postavijo zaznamke.
Zaznamki se vnesejo v zaporedje predmetov.

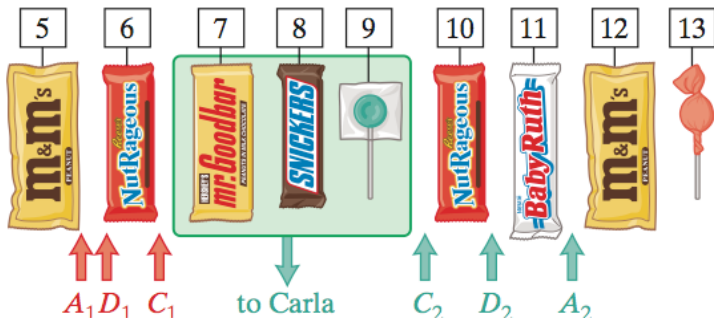


4) Delitev: svoj delež prvi dobi igralec, ki je postavil prvi zaznamek najbolj na levo, t.j. B.



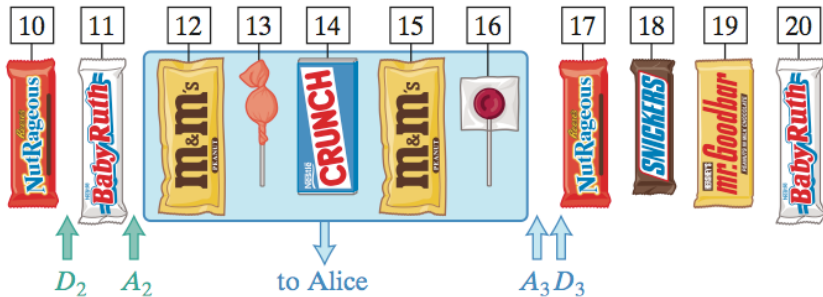
Zaznamki igralca B se brišejo.

4) Delitev: drugi, ki bo poplačan, je tisti, ki ima svoj drugi zaznamek (izmed zaznamkov A, C in D) najbolj na levo, t.j. C.

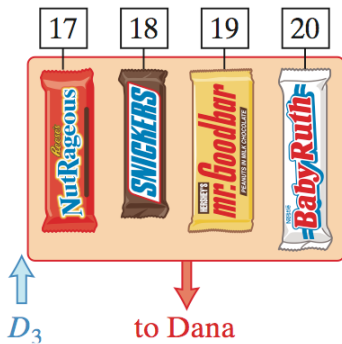


Zaznamki igralca C se brišejo.

- 4) Delitev: A in D imata svoja tretja zaznamka na istem mestu.
Kdo izmed njiju bo poplačan, odloči žreb (v razmislek: bolje za ostale bi bilo, da bi bil poplačan tisti, ki ima manj obsežen tretji segment). V nadaljevanju: tretji naj bo A.



- 4) Delitev: zadnjemu igralcu preostanejo predmeti iz zadnjega segmenta, ki ga je ta igralec določil.



- Igralci A, B, C in D so dobili enega izmed segmentov, katerega velikost so si sami določili. Torej ne smejo biti zavistni do drugih.

4) Delitev še ne razdeljenih predmetov.



- Vrednost nerazdeljenih predmetov je majhna v primerjavi z vrednostjo že razdeljenih predmetov. Torej je pomen naslednje delitve manjši.
- Metoda delitve ni predpisana (dogovor, žreb, metoda zapečatenih ponudb).

Literatura

- [1] <http://www4.ncsu.edu/~uzgeorge/FairDivision%207-10and11.pdf> (naslov nedostopen novembra 2019. Dostopen pa je preko: <https://archive.org/web/>).
- [2] <http://jlmartin.faculty.ku.edu/~jlmartin/courses/math105-F11/> (dostopno novembra 2019).
- [3] Martin Juvan: *Pravicna delitev in delitev brez zavisti*, Seminar Matematicne igre II, DMFA, Ljubljana, 2008.