

Mehanika 1

Osnove Newtonove mehanike

- (1) Izpelji formulo za kompozicijo Galilejevih transformacij.

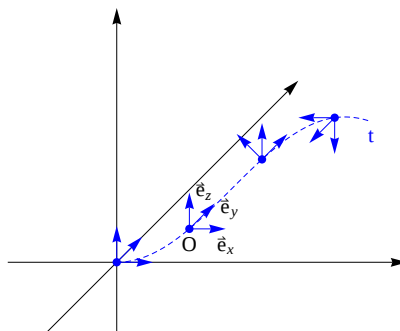
Rešitev: V Newtonovem opisu klasične mehanike predpostavljamo, da sta prostor in čas absolutna. To pomeni, da je prostor dogodkov oblike

$$S = E \times T,$$

kjer je E trirazsežni evklidski prostor, medtem ko s T parametriziramo čas dogodkov. Prva komponenta nam pove, kje se je dogodek zgodil, druga pa, kdaj se je zgodil. V tem opisu torej predpostavimo, da je mogoče izmeriti, ali nek objekt miruje v prostoru. V Galilejevem opisu pa po drugi strani predpostavimo samo, da je čas absoluten in da torej imamo projekcijo na časovno komponento, nimamo pa naravne projekcije na prostorsko komponento. V Galilejevem opisu lahko izmerimo, ali se nek objekt premika s konstantno hitrostjo, ne moremo pa nedvoumno določiti, ali miruje glede na prostor.

Ko opisujemo gibanje točke ali telesa, to ponavadi storimo tako, da povemo, kako se spreminjajo njene koordinate v odvisnosti od časa. Le-te pa so odvisne od našega položaja oziroma orientacije. Z različnih zornih kotov se gibanje točke opiše z različnimi funkcijami.

Koordinatni sistem na prostoru dogodkov S je enoparametrična družina izometrij prostora E s prostorom $\mathbb{R}^3$, parametrizirana s časom. To pomeni, da imamo ob vsakem času izbrano neko točko O , ki je izhodišče koordinatnega sistema, in pa trojico ortonormiranih vektorjev $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Mislimo si lahko, da je O naš trenutni položaj in da trojica $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ določa našo trenutno orientacijo.



Vsak dogodek lahko glede na izbrani koordinatni sistem opišemo s koordinatami

$$(\vec{r}, t) = (x, y, z, t),$$

ki nam določajo bijekcijo $\Phi = (\vec{r}, t) : E \times T \rightarrow \mathbb{R}^4$. Zaenkrat smo predpostavili, da uporabljajo vsi opazovalci enako naravnane ure. Lahko pa bi to zahtevo še malo sprostili in zahtevali samo, da vsem tečejo enako hitro, ne kažejo pa vse nujno istega časa.

Razred vseh koordinatnih sistemov je prevelik za našo obravnavo. Najbolj zanimiv je podrazred inercialnih koordinatnih sistemov. To so tisti koordinatni sistemi, ki se gibljejo enakomerno glede na absolutni prostor in so ves čas enako orientirani. Lahko pa bi jih definirali tudi s pogojem, da je v njih veljaven drugi Newtonov zakon. Glede na

to, da je drugi Newtonov zakon pravzaprav diferencialna enačba drugega reda, bosta dva koordinatna sistema, ki se enakomerno gibljeta eden glede na drugega, oba hkrati inercialna ali pa ne. Poleg tega se inercialnost ohranja še pri spremembi orientacije in pa pri spremembi ure. Inercialnih sistemov je torej veliko, naša naloga pa bo, da jih ustrezno parametriziramo.

Galilejeve transformacije:

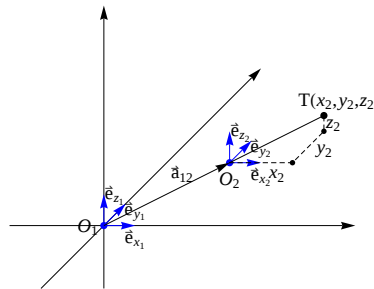
Recimo, da imamo inercialna koordinatna sistema $(O_1, (\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_1}))$ in $(O_2, (\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_{z_2}))$. Preslikavi $G_{12} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, ki je implicitno definirana s predpisom

$$(\vec{r}_1, t_1) = G_{12}(\vec{r}_2, t_2),$$

in ki ustreza spremembi koordinat iz drugega koordinatnega sistema v prvi koordinatni sistem, rečemo *Galilejeva transformacija*. Različni pari inercialnih koordinatnih sistemov nam porodijo različne Galilejeve transformacije. Množica vseh tako dobljenih Galilejevih transformacij tvori *Galilejevo grupo*. Najprej si bomo pogledali nekaj preprostih primerov Galilejevih transformacij.

1. Translacija izhodišča:

Recimo, da imamo primer, ko koordinatna sistema KS1 in KS2 mirujeta eden glede na drugega, njuni izhodišči pa sta zamaknjeni za vektor $\vec{a}_{12} = (a_x, a_y, a_z)$. Oba sta orientirana na isti način, njuni uri pa sta poravnani.



Izberimo si poljubno točko T , ki ima koordinate (x_1, y_1, z_1, t_1) glede na KS1 in (x_2, y_2, z_2, t_2) glede na KS2. Med koordinatami točke T potem velja zveza:

$$x_1 = x_2 + a_x,$$

$$y_1 = y_2 + a_y,$$

$$z_1 = z_2 + a_z,$$

$$t_1 = t_2,$$

oziroma v vektorski obliki:

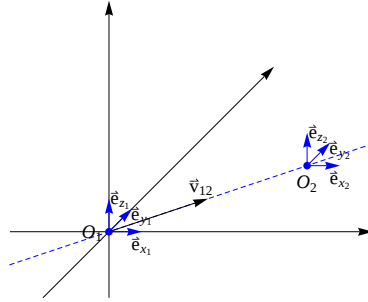
$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{a}_{12},$$

$$t_1 = t_2.$$

Gledano kot preslikava $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ je ta preslikava translacija na 'prostorskem' delu $\mathbb{R}^4$.

2. Enakomerno gibanje:

Recimo sedaj, da se koordinatni sistem KS2 enakomerno s hitrostjo $\vec{v}_{12} = (v_x, v_y, v_z)$ premika glede na koordinatni sistem KS1. Predpostavimo še, da njuni izhodišči ob času $t_2 = 0$ sovpadata, da sta oba orientirana na isti način in da sta njuni uri poravnani.



Situacija je pri vsakem fiksnem času podobna kot v prejšnjem primeru. Ob času t_2 sta koordinatna sistema namreč zamaknjena za vektor $t_2 \vec{v}_{12}$. Med koordinatami točke T v obeh koordinatnih sistemih torej velja zveza:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_2 + t_2 v_x, \\y_1 &= y_2 + t_2 v_y, \\z_1 &= z_2 + t_2 v_z, \\t_1 &= t_2,\end{aligned}$$

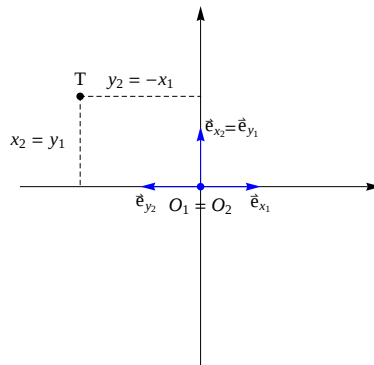
oziroma v vektorski obliki:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{r}_2 + t_2 \vec{v}_{12}, \\t_1 &= t_2.\end{aligned}$$

Dobljena Galilejeva transformacija je linearna preslikava $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, pri kateri pa prostorski in časovni del nista ločena med sabo.

3. Rotacija:

Naslednji preprost primer relativne lege dveh koordinatnih sistemov je sprememba orientacije. Za začetek si pogledjmo preprost dvodimenzionalen primer.



Koordinatni sistem KS2 je zarotiran za 90° glede na koordinatni sistem KS1. To rotacijo lahko predstavimo z matriko

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Če ima točka T koordinati (x_2, y_2) v sistemu KS2 in koordinati (x_1, y_1) v sistemu KS1, med koordinatami velja zveza

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Denimo sedaj, da ima KS2 za bazo vektorje $(\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_{z_2})$, KS1 pa $(\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_1})$. Položaj KS2 glede na KS1 opišemo z rotacijsko matriko Q_{12} , ki zadošča pogoju

$$[\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_{z_2}] = [\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_1}] \cdot Q_{12}.$$

Med koordinatami točke T v obeh koordinatnih sistemih potem velja zveza:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= Q_{12}\vec{r}_2, \\ t_1 &= t_2.\end{aligned}$$

Dobljena Galilejeva transformacija je linearna preslikava $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, ki zarotira prostorski del, časovni del pa pusti pri miru.

V tem primeru moramo biti pozorni na rahlo različno vlogo rotacijske matrike v primerih koordinat in pa v primerih baz. Na koordinate oziroma vektorje deluje grupa rotacij z leve, medtem ko deluje grupa rotacij na prostor baz z desne. Če nam matrika Q_{12} predstavlja prehod iz baze KS1 v bazo KS2, nam na nivoju koordinat predstavlja prehod iz (x_2, y_2, z_2) koordinat v (x_1, y_1, z_1) koordinate.

4. Časovna translacija:

V tem primeru koordinatna sistema KS1 in KS2 sovpadata, kar se tiče izhodišča in orientacije, le uri imata drugače naravnani. Povezava med koordinatami je potem oblike:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{r}_2, \\ t_1 &= t_2 + \tau_{12}.\end{aligned}$$

Dobljena Galilejeva transformacija je analogna tisti iz prvega primera, le da sta zamenjani vlogi časa in prostora.

V splošnem je relativni položaj dveh koordinatnih sistemov bolj kompliciran kot v zgornjih primerih. Zmeraj pa ga lahko opišemo s pomočjo zgornjih štirih parametrov na naslednji način.

Relativno gibanje sistema KS2 glede na KS1 opišemo z vektorjem $\vec{v}_{12}$ (s komponentami glede na bazo KS1). Matrika Q_{12} nam pove, kako je baza sistema KS2 zarotirana glede na bazo sistema KS1. Položaj izhodišča sistema KS2 (ob času $t_2 = 0$) glede na KS1 označimo z vektorjem $\vec{a}_{12}$ (s komponentami glede na bazo KS1). Denimo še, da je $t_1 = t_2 + \tau_{12}$. Potem velja:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{a}_{12} + t_2\vec{v}_{12} + Q_{12}\vec{r}_2, \\ t_1 &= t_2 + \tau_{12}.\end{aligned}$$

Povezavo med koordinatami v obeh koordinatnih sistemih lahko zapišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ t_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{12} & \vec{v}_{12} & \vec{a}_{12} \\ 0 & 1 & \tau_{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{r}_2 \\ t_2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

V teh oznakah je $Q_{12} \in SO(3)$, $\vec{a}_{12}, \vec{v}_{12} \in \mathbb{R}^3$ in $\tau_{12} \in \mathbb{R}$.

Izpeljava formule za kompozicijo Galilejevih transformacij:

Izpeljimo sedaj formulo za kompozicijo Galilejevih translacij. Recimo, da imamo med koordinatnima sistemoma KS1 in KS2 ter KS2 in KS3 zvezi:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{a}_{12} + t_2 \vec{v}_{12} + Q_{12} \vec{r}_2, \\ t_1 &= t_2 + \tau_{12}, \\ \vec{r}_2 &= \vec{a}_{23} + t_3 \vec{v}_{23} + Q_{23} \vec{r}_3, \\ t_2 &= t_3 + \tau_{23}.\end{aligned}$$

Med koordinatnima sistemoma KS1 in KS3 imamo potem transformacijo:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{a}_{12} + t_2 \vec{v}_{12} + Q_{12} \vec{r}_2, \\ &= \vec{a}_{12} + (t_3 + \tau_{23}) \vec{v}_{12} + Q_{12} (\vec{a}_{23} + t_3 \vec{v}_{23} + Q_{23} \vec{r}_3), \\ &= (\vec{a}_{12} + Q_{12} \vec{a}_{23} + \tau_{23} \vec{v}_{12}) + t_3 (\vec{v}_{12} + Q_{12} \vec{v}_{23}) + Q_{12} Q_{23} \vec{r}_3.\end{aligned}$$

Po drugi strani pa je

$$\begin{bmatrix} Q_{12} & \vec{v}_{12} & \vec{a}_{12} \\ 0 & 1 & \tau_{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{23} & \vec{v}_{23} & \vec{a}_{23} \\ 0 & 1 & \tau_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{12} Q_{23} & Q_{12} \vec{v}_{23} + \vec{v}_{12} & Q_{12} \vec{a}_{23} + \tau_{23} \vec{v}_{12} + \vec{a}_{12} \\ 0 & 1 & \tau_{12} + \tau_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da lahko kompozicijo Galilejevih transformacij izrazimo z matričnim produktom, kar nam določa upodobitev oziroma reprezentacijo

$$\text{Gal} \rightarrow \text{GL}(5, \mathbb{R})$$

Galilejeve grupe v grupo obrnljivih 5×5 realnih matrik. Da je ta preslikava upodobitev, pomeni naslednje. Recimo, da:

- matrika G_{12} predstavlja položaj koordinatnega sistema KS2 glede na KS1,
- matrika G_{23} predstavlja položaj koordinatnega sistema KS3 glede na KS2.

Potem matrika $G_{13} = G_{12} G_{23}$ predstavlja položaj KS3 glede na KS1.

Primer uporabe formule za kompozicijo Galilejevih transformacij:

Poglejmo si na preprostem ravninskem primeru, kako ta stvar deluje. Recimo, da imamo tri koordinatne sisteme. Koordinatni sistem KS2 je zarotiran za 90° glede na KS1 in premaknjen za vektor $\vec{a}_{12} = (a, 0)$. Glede na KS1 pa se KS2 giblje s hitrostjo $\vec{v}_{12} = (0, v)$. Denimo še, da je položaj KS3 glede na KS2 enak kot je položaj KS2 glede na KS1 in da je $t_1 = t_2 = t_3 = t$. Potem velja $\vec{a}_{12} = \vec{a}_{23} = (a, 0)$, $\vec{v}_{12} = \vec{v}_{23} = (0, v)$ in

$$Q_{12} = Q_{23} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

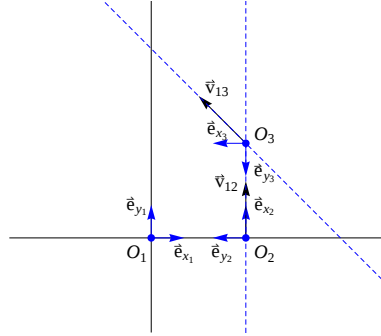
Položaj koordinatnega sistema KS3 glede na KS1 sedaj dobimo po formuli

$$\begin{bmatrix} Q_{13} & \vec{v}_{13} & \vec{a}_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{12} & \vec{v}_{12} & \vec{a}_{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_{23} & \vec{v}_{23} & \vec{a}_{23} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Od tod dobimo:

$$\begin{aligned} Q_{13} &= Q_{12}Q_{23} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ \vec{a}_{13} &= Q_{12}\vec{a}_{23} + \vec{a}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}, \\ \vec{v}_{13} &= Q_{12}\vec{v}_{23} + \vec{v}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v \\ v \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Torej je koordinatni sistem KS3 zarotiran za 180° glede na KS1, premaknjen za vektor $\vec{a}_{13} = (a, a)$, glede na KS1 pa se giblje s hitrostjo $\vec{v}_{13} = (-v, v)$.



Opomba 1: Galilejeva grupa je 10-dimenzionalna Liejeva grupa, ki je difeomorfna mnogoterosti $SO(3) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, ni pa ta difeomorfizem izomorfizem grup. Imamo pa podgrupe, ki ustrezajo posameznim faktorjem v tem razcepu.

SO(3):

Ta podgrupa sestoji iz matrik oblike

$$\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in ustreza rotacijam evklidskega prostora E . Posledica simetrije prostora dogodkov, ki ustreza tej podgrupi, je zakon o ohranitvi vrtilne količine.

$\mathbb{R}^3$:

Ta podgrupa sestoji iz matrik oblike

$$\begin{bmatrix} I & 0 & \vec{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in ustreza translacijam evklidskega prostora E . Iz teh simetrij lahko izpeljemo zakon o ohranitvi gibalne količine.

$\mathbb{R}^3$:

Ta podgrupa sestoji iz matrik oblike

$$\begin{bmatrix} I & \vec{v} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

V klasični mehaniki bi tej grupni strukturi lahko rekli formula za seštevanje hitrosti. Če se namreč koordinatni sistem KS2 giblje glede na KS1 s hitrostjo $\vec{v}_{12}$ in se KS3 giblje glede na KS2 s hitrostjo $\vec{v}_{23}$, se KS3 giblje glede na KS1 s hitrostjo $\vec{v}_{13} = \vec{v}_{12} + \vec{v}_{23}$.

$\mathbb{R}$:

Ta podgrupa sestoji iz matrik oblike

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in ustreza časovnim premikom oziroma translacijam prostora T . S temi simetrijami je povezan zakon o ohranitvi energije.

Opomba 2: Če imamo dva koordinatna sistema, ki nista nujno oba inercialna, lahko formulo za prehod iz enih koordinat v druge izrazimo v obliki:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_{O_2}(t_2) + Q_{12}(t_2)\vec{r}_2, \\ t_1 &= t_2 + \tau_{12}, \end{aligned}$$

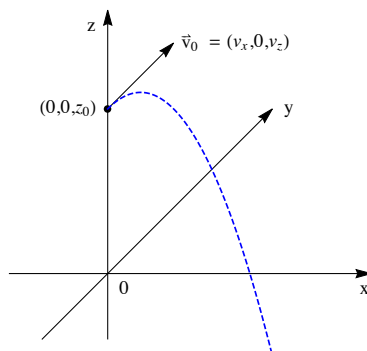
kjer sta $\vec{r}_{O_2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ in $Q_{12} : \mathbb{R} \rightarrow \text{SO}(3)$ gladki poti. Funkcija $\vec{r}_{O_2}$ nam pove, kje je središče KS2 glede na KS1 ob danem času, funkcija Q_{12} pa, kako je KS2 orientiran glede na KS1. V primeru, ko sta oba koordinatna sistema inercialna, je funkcija Q_{12} konstantna, funkcija $\vec{r}_{O_2}(t_2) = \vec{a}_{12} + t_2\vec{v}_{12}$ pa linearna. Vidimo torej, da lahko množico inercialnih koordinatnih sistemov opišemo z 10-dimenzionalno mnogoterostjo, za opis vseh koordinatnih sistemov pa bi potrebovali neskončno-dimenzionalno mnogoterost. $\square$

- (2) Obravnavaj gibanje materialne točke z maso m pod vplivom homogene sile teže.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo obravnavali gibanje točke v polju homogene sile, ki si jo lahko zaradi enostavnosti predstavljamo kot silo teže. Preden zapišemo enačbe gibanja, si je koristno izbrati koordinatni sistem tako, da bodo enačbe in opis gibanja čimbolj enostavne.

V našem primeru bomo koordinatni sistem usmerili tako, da bo:

- (1) sila teže kazala v nasprotni smeri z -osi,
- (2) v začetnem trenutku hitrost točke ležala v xz -ravnini,
- (3) v začetnem trenutku točka na z -osi.



Položaj točke ob času t bomo označili z $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Če ne bo nevarnosti za kakšno pomoto, neodvisne spremenljivke t pogosto ne bomo pisali. Privzeli bomo, da se točka giblje pod vplivom sile teže $\vec{F}_g = (0, 0, -mg)$.

Gibanje točke po prostoru določa drugi Newtonov zakon

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_g.$$

Matematično gledano je to sistem treh navadnih diferencialnih enačb drugega reda, ki ga po komponentah lahko zapišemo v obliki:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0, \\ m\ddot{y} &= 0, \\ m\ddot{z} &= -mg. \end{aligned}$$

Rešitev takšnega sistema diferencialnih enačb je določena z začetnim položajem in pa z začetno hitrostjo točke:

$$\begin{aligned} \vec{r}(0) &= (0, 0, z_0), \\ \dot{\vec{r}}(0) &= (v_x, 0, v_z). \end{aligned}$$

V splošnem je naš napredek odvisen od naše spretnosti reševanja diferencialnih enačb. Če sistema ne znamo rešiti analitično, lahko poskusimo približno rešitev poiskati s kakšnimi numeričnimi orodji. V našem primeru so komponente sistema separirane, zato lahko vsako enačbo rešimo posebej. V bistvu nam niti ni potrebno znati reševati diferencialnih enačb, saj zadostuje že dvakratno integriranje.

V smeri osi x :

Z integriranjem enačbe $m\ddot{x} = 0$ (oziroma $\ddot{x} = 0$) dobimo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C, \\ x &= Ct + D. \end{aligned}$$

Z upoštevanjem začetnih pogojev $x(0) = 0$ in $\dot{x}(0) = v_x$ od tod sledi

$$x(t) = v_x t.$$

V smeri osi y :

Tokrat na podoben način z integriranjem enačbe $m\ddot{y} = 0$ dobimo:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= C, \\ y &= Ct + D. \end{aligned}$$

Ker je v tem primeru $y(0) = 0$ in $\dot{y}(0) = 0$, je

$$y(t) = 0.$$

V smeri osi z :

V navpični smeri z integriranjem enačbe $m\ddot{z} = -mg$ (oziroma $\ddot{z} = -g$) dobimo:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -gt + C, \\ z &= -\frac{1}{2}gt^2 + Ct + D. \end{aligned}$$

Če upoštevamo, da je $z(0) = z_0$ in $\dot{z}(0) = v_z$, dobimo

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_z t + z_0.$$

Trajektorija točke, na katero deluje homogena sila teže, je torej

$$\vec{r}(t) = (v_x t, 0, -\frac{1}{2}gt^2 + v_z t + z_0).$$

Ta zapis nam za vsak čas t natančno pove, kje se točka nahaja.

Če je $v_x = 0$, se točka premika po z -osi. Če pa je $v_x \neq 0$, pa lahko iz enakosti $x = v_x t$ izrazimo t in rezultat vstavimo v $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_z t + z_0$. Tako dobimo, da se točka giblje po paraboli

$$y = 0, z = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_x^2}x^2 + \frac{v_z}{v_x}x + z_0.$$

Opomba: Primeri homogenih sil, ki povzročijo podobno dinamiko objektov, so še:

- gibanje nabitega delca v homogenem električnem polju,
- opis gibanja v enakomerno pospešenem neinercialnem koordinatnem sistemu,
- sila trenja, ki deluje na kroglo, ko ta drsi po podlagi.

□

- (3) Materialna točka z maso m in z električnim nabojem q se giblje pod vplivom Lorentzove sile

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Privzemimo, da sta $\vec{E} = (E, 0, 0)$ in $\vec{B} = (0, B, 0)$ konstantni vektorski polji. Izračunaj trajektorijo točke, če ta na začetku miruje v koordinatnem izhodišču.

Rešitev: Drugi Newtonov zakon lahko v primeru elektromagnetne sile zapišemo v obliki

$$m\ddot{\vec{r}} = q(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}).$$

Ko izračunamo vektorski produkt, dobimo sistem diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= qE - qB\dot{z}, \\ m\ddot{y} &= 0, \\ m\ddot{z} &= qB\dot{x}. \end{aligned}$$

Zanima nas rešitev tega sistema pri začetnih pogojih $\vec{r}(0) = (0, 0, 0)$ in $\vec{v}(0) = (0, 0, 0)$. Iz druge enačbe lahko takoj vidimo, da je $y(t) = 0$, pri izračunu preostalih dveh komponent pa bomo imeli nekaj več dela. Če označimo $v_x = \dot{x}$ in $v_z = \dot{z}$, pridemo do nehomogenega linearne sistema diferencialnih enačb prvega reda:

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \frac{qE}{m} - \frac{qB}{m}v_z, \\ \dot{v}_z &= \frac{qB}{m}v_x. \end{aligned}$$

Če prvo enačbo odvajamo po času in upoštevamo drugo enačbo, pridemo do enačbe

$$\ddot{v}_x + \omega^2 v_x = 0,$$

kjer je $\omega = \frac{qB}{m}$. To je diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti, ki opisuje nihanje količine v_x s frekvenco ω . Splošna rešitev te enačbe je oblike

$$v_x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Z upoštevanjem začetnih pogojev $v_x(0) = 0$ in $\dot{v}_x(0) = \frac{qE}{m}$ dobimo, da je

$$v_x(t) = \frac{E}{B} \sin \omega t.$$

Če to enačbo integriramo in upoštevamo, da je $x(0) = 0$, pa dobimo še

$$x(t) = \frac{E}{B\omega} (1 - \cos(\omega t)).$$

Ko ta izraz vstavimo v zvezo $m\ddot{z} = qB\dot{x}$, dobimo, da je

$$\ddot{z} = \frac{\omega E}{B} \sin \omega t.$$

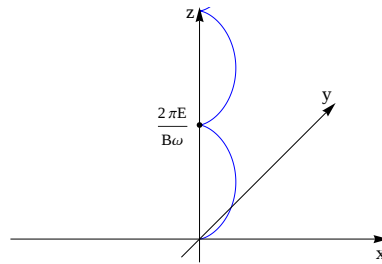
Po dvakratni integraciji in upoštevanjem začetnih pogojev $z(0) = 0$ in $\dot{z}(0) = 0$ dobimo še

$$z(t) = \frac{E}{B\omega} (\omega t - \sin(\omega t)).$$

Trajektorija točke je torej

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{E}{B\omega} (1 - \cos(\omega t)), 0, \frac{E}{B\omega} (\omega t - \sin(\omega t)) \right).$$

Dano gibanje opisuje cikloido v xz -ravnini.



Opomba: Pri tej nalogi smo študirali gibanje točke v homogenem elektromagnetnem polju. Če bi na točko delovalo samo homogeno magnetno polje, pa bi bile možne naslednje trajektorije:

- če točka v začetnem trenutku miruje, miruje ves čas,
- če ima točka v začetnem trenutku hitrost v smeri polja, se premika enakomerno v smeri polja,
- če ima točka v začetnem trenutku hitrost, ki je pravokotna na magnetno polje, potem točka potuje po krožnici, ki leži v ravnini, ki je pravokotna na polje,
- če ima točka v začetnem trenutku hitrost, ki ima neničelni komponenti v smeri polja in v pravokotni smeri, točka med gibanjem opiše vijačnico, ki ima os vzporedno polju. $\square$

- (4) Materialna točka z maso m pada navpično pod vplivom sile teže. Gibanje točke zavira sila zračnega upora, ki je sorazmerna s kvadratom hitrosti. Na začetku točka miruje, nato pa začne padati. Zapiši diferencialno enačbo, ki modelira hitrost točke med padanjem.

Rešitev: Gibanje točke določa drugi Newtonov zakon, ki se v tem primeru glasi

$$m\dot{v} = mg - kv^2.$$

Z v smo označili hitrost točke v navpični smeri, člena na desni pa ustrezata sili teže $F_g = mg$ ter sili zračnega upora $F_{upora} = -kv^2$.

Da si malce poenostavimo računanje, uvedimo oznaki $a^2 = \frac{k}{m}$ in $b^2 = g$. Po deljenju z m se enačba prevede v diferencialno enačbo

$$\dot{v} = b^2 - a^2 v^2.$$

To je primer diferencialne enačbe z ločljivima spremenljivkama. Rešimo jo tako, da pišemo $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$, ločimo spremenljivki v in t vsako na svojo stran in nato vsako stran posebej integriramo. V našem primeru dobimo:

$$\frac{dv}{dt} = b^2 - a^2 v^2,$$

$$\frac{dv}{b^2 - a^2 v^2} = dt.$$

Integral racionalne funkcije na levi je enak

$$\int \frac{dv}{b^2 - a^2 v^2} = \frac{1}{2ab} \ln \frac{b + av}{b - av} + C,$$

od koder dobimo implicitno zvezo

$$\frac{1}{2ab} \ln \frac{b + av}{b - av} = t + C.$$

Če upoštevamo, da je na začetku $v(0) = 0$, dobimo $C = 0$, kar nam da

$$\ln \frac{b + av}{b - av} = 2abt.$$

Iz te enačbe lahko sedaj eksplicitno izrazimo $v(t)$. Rešitev je enaka

$$v(t) = \frac{b}{a} \cdot \frac{e^{2abt} - 1}{e^{2abt} + 1} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \frac{e^{2abt} - 1}{e^{2abt} + 1}.$$

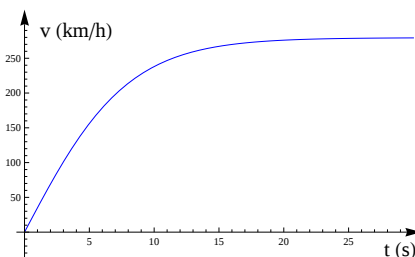
V limiti dobimo končno hitrost točke $v_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}$.

Opomba: S to enačbo lahko modeliramo hitrost padalca med padanjem skozi atmosfero.

V tem primeru je koeficient k enak $k = \frac{1}{2}\rho AC_d$, kjer je:

- ρ gostota zraka,
- A ploščina prereza padalca,
- C_d koeficient zračnega upora.

Poglejmo si še primer s konkretnimi številkami. Vzemimo, da ima padalec $80kg$ in da je $\rho = 1.3kg/m^3$, $g = 9.8m/s^2$. Denimo še, da je padalec med padanjem v navpični legi. Potem je $C_d \approx 1$, čelni prerez pa je $A \approx 0.2m^2$. Pri teh podatkih bi bila končna hitrost padalca $v_k \approx 280km/h$, dosegel pa bi jo v približno $20s$, kot kaže spodnji graf.



□