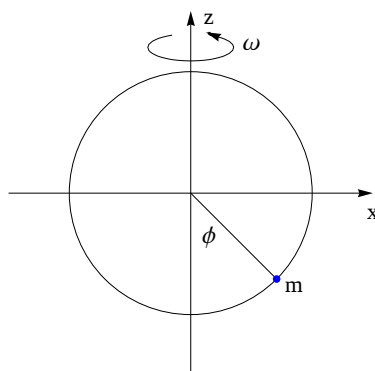


Mehanika 1

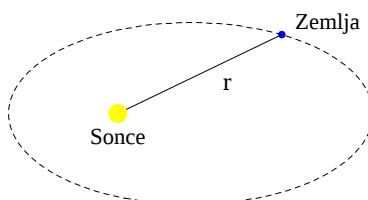
Sistemi z eno prostostno stopnjo

Sistem z eno prostostno stopnjo je mehanski sistem, katerega stanje (položaj) lahko opišemo z enim parametrom.

Zgled. (1) Recimo, da se točka z maso m pod vplivom sile teže giblje po obroču, ki se enakomerno vrti okoli navpične osi. Tedaj se točka giblje v treh dimenzijah, čeprav lahko njen položaj natančno določimo že z enim parametrom (na primer s kotom).



(2) Za opis kroženja Zemlje okoli Sonca bi načeloma potrebovali tri parametre, pokazali pa bomo, da lahko gibanje Zemlje natanko določimo že, če vemo, kako se spreminja njena oddaljenost od Sonca. Tako se gibanje Zemlje v trirazsežnem prostoru zreducira na 'gibanje' parametra r .



Tipični primeri sistemov, ki jih lahko opišemo z enim parametrom, so:

- gibanje točke po premici, klancu ali krivulji,
- nihanje vzmeti,
- vrtenje togega telesa okoli fiksne osi,
- gibanje točke v polju centralne sile.

Prostor stanj je na primer pri gibanju točke po sklenjeni krivulji homeomorfen S^1 , pri gibanju po premici pa $\mathbb{R}$. Predpostavili bomo, da je prostor stanj enodimenzionalna gladka mnogoterost M in z x označili koordinato na M . Gibanje sistema je potem določeno z enačbo

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t).$$

Od parametra x so ponavadi odvisne sile, ki so dane s potencialno energijo točke, kot sta na primer gravitacijska sila ali pa sila vzmeti. Primera sil, ki sta odvisni od $\dot{x}$ sta na primer sila dušenja ali pa sila zračnega upora. Od parametra t pa je na primer lahko odvisna sila, s katero motor poganja naš sistem.

Za začetek bomo privzeli, da je sila F konservativna, kar pomeni, da je oblike $F = F(x)$. V tem primeru lahko definiramo potencialno energijo sistema $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$V(x) = - \int F(x) dx.$$

Potencialna energija je določena do aditivne konstante natančno. Če imamo dano potencialno energijo, lahko silo izračunamo s predpisom

$$F(x) = -V'(x).$$

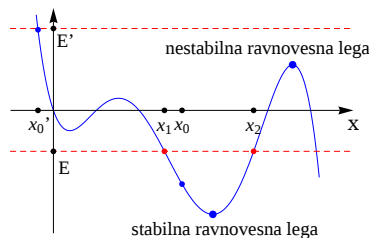
Za konservativne sile velja zakon o ohranitvi energije

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E.$$

Gibanje sistema lahko obravnavamo kvantitativno in kvalitativno. Natanko lahko gibanje sistema izračunamo z reševanjem diferencialne enačbe iz 2. Newtonovega zakona. Nekaj grobih značilnosti gibanja sistema pa lahko razberemo že z grafa potenciala V .

Lokalni ekstremi potenciala V ustrezajo ravnovesnim legam sistema, in sicer:

- lokalni minimum $V \rightsquigarrow$ stabilna ravnovesna lega,
- lokalni maksimum $V \rightsquigarrow$ nestabilna ravnovesna lega.



Intuitivno si gibanje sistema lahko predstavljamo kot gibanje točke po grafu potenciala pod vplivom sile teže. Projekcija tega gibanja na abscisno os nam pove ali se parameter povečuje ali zmanjšuje, ne pove pa nam hitrosti spreminjanja.

Gibanja so možna pri energijah $E \geq V_{min}$. Če je na primer sistem na začetku v položaju x_0 , ima energijo $E > V(x_0)$ in se premika proti desni, se bo premikal proti desni, dokler ne pride do točke x_2 , za katero je $V(x_2) = E$. Nato se bo obrnil in se premikal proti levi, dokler ne pride do točke x_1 , za katero je $V(x_1) = E$. V nadaljevanju bo gibanje sistema periodično in omejeno na intervalu $[x_1, x_2]$. Če pa je na primer sistem na začetku v položaju x'_0 z energijo $E' = V(x'_0)$, se bo ves čas gibal proti desni. Pri teh začetnih pogojih je torej gibanje neomejeno.

(1) Kvalitativno obravnavaj naslednja potenciala:

(a) $V(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\gamma}{r}, \quad r \in (0, \infty),$

(b) $V(\phi) = -mR^2\Omega^2 \cos \phi - \frac{1}{2}mR^2\omega^2 \sin^2 \phi, \quad \Omega < \omega, \phi \in S^1.$

Rešitev: (a) Poglejmo najprej potencial $V : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definiran s predpisom

$$V(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\gamma}{r}.$$

Obe limiti potenciala sta:

$$\lim_{r \rightarrow 0} V(r) = \infty,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0.$$

Odvod potenciala je enak

$$V'(r) = -\frac{l^2}{mr^3} + \frac{\gamma}{r^2},$$

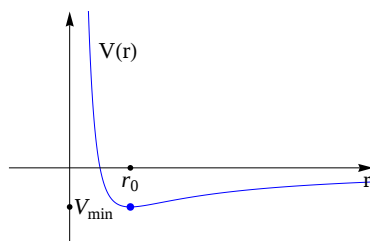
od koder lahko izpeljemo, da ima potencial eno samo stacionarno točko

$$r_0 = \frac{l^2}{m\gamma}.$$

Iz asimptotskih lastnosti potenciala sledi, da ima potencial v r_0 globalni minimum, ki je enak

$$V_{min} = V(r_0) = -\frac{m\gamma^2}{2l^2}.$$

Graf potenciala ima naslednjo obliko.



Kvalitativno lahko o gibanju povemo naslednje:

- V točki $r_0 = \frac{l^2}{m\gamma}$ ima sistem stabilno ravnovesno lego.
- Pri energiji $E = V_{min}$ točka miruje v stabilni ravnovesni legi.
- Če je $E \in (V_{min}, 0)$, sistem niha na intervalu $[r_{min}, r_{max}]$, kjer je $V(r_{min}) = V(r_{max}) = E$.
- Če je $E \geq 0$ je gibanje neomejeno na intervalu $[r_{min}, \infty)$, kjer je $V(r_{min}) = E$.

Ta potencial se pojavi pri obravnavi gibanja točke v polju gravitacijske centralne sile. Parameter γ določa jakost gravitacijskega potenciala, medtem ko je l vrtilna količina točke glede na center sile. Energiji $E > 0$ in $E = 0$ ustrezata gibanju točke po hiperboli oziroma paraboli. Pri energiji $E = V_{min}$ je tir točke krožnica, pri energijah $V_{min} < E < 0$ pa elipsa.

(b) Poiščimo najprej ravnovesne lege sistema. Odvod potenciala je enak

$$V'(\phi) = mR^2\Omega^2 \sin \phi - mR^2\omega^2 \sin \phi \cos \phi = mR^2 \sin \phi (\Omega^2 - \omega^2 \cos \phi).$$

Od tod preberemo, da so ravnovesne lege sistema:

$$\phi_1 = 0,$$

$$\phi_2 = \pi,$$

$$\phi_{\pm} = \pm \arccos \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2.$$

Za klasifikacijo ravnovesnih leg moramo izračunati še drugi odvod

$$V''(\phi) = mR^2(\Omega^2 \cos \phi - \omega^2 \cos 2\phi).$$

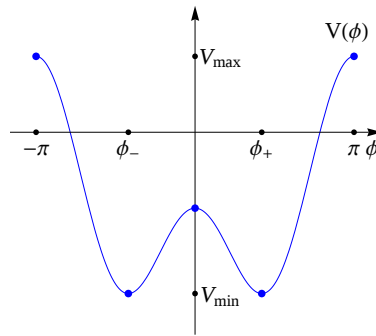
Torej je:

$$\begin{aligned} V''(0) &= mR^2(\Omega^2 - \omega^2) < 0, \\ V''(\pi) &= -mR^2(\Omega^2 + \omega^2) < 0, \\ V''(\phi_{\pm}) &= \frac{mR^2(\omega^4 - \Omega^4)}{\omega^2} > 0. \end{aligned}$$

Potencial je omejen in velja:

$$\begin{aligned} V_{min} &= V(\phi_{\pm}) = -\frac{mR^2(\omega^4 + \Omega^4)}{2\omega^2}, \\ V_{max} &= V(\pi) = mR^2\Omega^2. \end{aligned}$$

Sedaj lahko skiciramo graf potenciala na intervalu $[-\pi, \pi]$. V resnici bi morali točki, ki ustrezata parametroma $\pm\pi$, zlepiti.



Kvalitativno lahko o gibanju povemo naslednje:

- V $\phi = 0$ in $\phi = \pi$ sta nestabilni, v $\phi = \phi_{\pm}$ pa stabilni ravnovesni legi.
- Pri energiji $E = V_{min}$ točka miruje v stabilni ravnovesni legi.
- Pri energijah $E \in (V_{min}, V(0))$ je gibanje omejeno in periodično na nekem intervalu okoli ene od stabilnih ravnovesnih leg.
- Če je $E = V_0$ točka bodisi miruje v nestabilni ravnovesni legi, ali pa se ji približuje. V tem primeru je nikoli ne doseže, kar pomeni, da je gibanje omejeno in neperiodično.
- Za $E \in (V(0), V_{max})$ je gibanje omejeno in periodično.
- Pri energiji $E = V_{max}$ je situacija podobna kot v primeru $E = V_0$.
- Pri energijah $E > V_{max}$ se točka ves čas premika v isto smer. Glede na topologijo krožnice je torej gibanje omejeno in periodično.

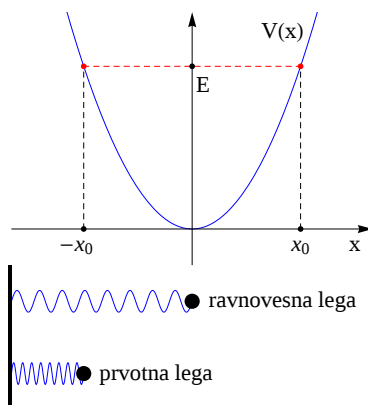
Do tega potenciala pridemo pri obravnavi gibanja točke po obroču, ki se enakomerno s kotno hitrostjo ω vrti okoli navpične osi. Parameter Ω je tako odvisen od polmera obroča in pa od težnega pospeška. Če obroč miruje, je na dnu obroča stabilna ravnovesna lega. Pri dovolj veliki hitrosti vrtenja ta ravnovesna lega postane nestabilna, pojavita pa se dve novi stabilni ravnovesni legi. $\square$

(2) Na vzmet s koeficientom k je pripeta točka z maso m .

(a) Določi gibanje točke, če vzmet na začetku stisnemo za x_0 in jo spustimo, da niha.

(b) Izračunaj periodo gibanja.

Rešitev: (a) Predstavljajmo si, da je vzmet s koeficientom k postavljena v vodoravni smeri in da se točka lahko premika v smeri vzmeti. Zanimalo nas bo, kakšno je gibanje točke pod vplivom sile vzmeti, če na začetku vzmet stisnemo, nato pa jo spustimo.



Odmik točke iz ravnovesne lege je funkcija časa, ki jo bomo označili z $x = x(t)$. Na začetku vzmet stisnemo za x_0 , kar pomeni, da je $x(0) = -x_0$. Ker vzmet spustimo, je $\dot{x}(0) = 0$. Privzeli bomo, da je sila vzmeti enaka $F(x) = -kx$, kar pomeni, da je potencialna energija enaka

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

Ker na začetku točka miruje, nima kinetične energije, zato je skupna energija enaka $E = \frac{1}{2}kx_0^2$, zakon o ohranitvi energije pa se glasi

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E.$$

Kvalitativno lahko v tem trenutku povemo, da točka pri danih začetnih pogojih niha na intervalu $[-x_0, x_0]$. Radi pa bi pokazali, da je nihanje harmonično. V ta namen moramo rešiti diferencialno enačbo iz 2. Newtonovega zakona

$$m\ddot{x} = -kx,$$

To enačbo lahko prepišemo v obliko

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

kjer smo označili $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. To je homogena diferencialna enačba 2. reda s konstantnimi koeficienti, ki ima splošno rešitev oblike

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Odvod rešitve je enak

$$\dot{x}(t) = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t.$$

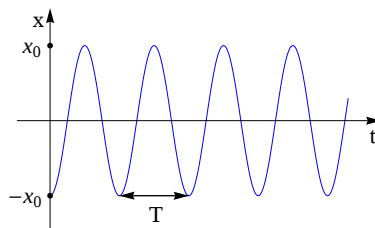
Z upoštevanjem začetnih pogojev dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} C_1 &= -x_0, \\ C_2\omega &= 0, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $C_1 = -x_0$, $C_2 = 0$. Tako smo izračunali, da je prosto nihanje vzmeti določeno s predpisom

$$x(t) = -x_0 \cos \omega t.$$

Vidimo, da bo točka harmonično nihala z amplitudo x_0 in s krožno frekvenco $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.



(b) Perioda nihanja je čas, ki je potreben za en nihaj. Ker je gibanje harmonično, bo čas, ko se točka prvič vrne v začetno lego, ustrezal enakosti

$$\omega T = 2\pi$$

oziroma

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Opomniti velja, da je perioda nihanja neodvisna od energije. □

(3) Materialna točka z maso m se giblje pod vplivom potenciala

$$V(x) = A(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}),$$

kjer sta α in A pozitivni konstanti.

- (a) Skiciraj graf potenciala in pokaži, da je gibanje periodično za $-A < E < 0$.
- (b) Izračunaj periodo nihanja v primeru, ko je $-A < E < 0$.
- (c) Izračunaj harmonično aproksimacijo periode nihanja v okolici ravnovesne lege.

Rešitev: (a) Odvod potenciala V je enak

$$V'(x) = A(-2\alpha e^{-2\alpha x} + 2\alpha e^{-\alpha x}) = 2\alpha A(e^{-\alpha x} - e^{-2\alpha x}),$$

od koder lahko izpeljemo, da ima potencial eno samo stacionarno točko $x = 0$. Iz limit

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) &= \infty, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} V(x) &= 0, \end{aligned}$$

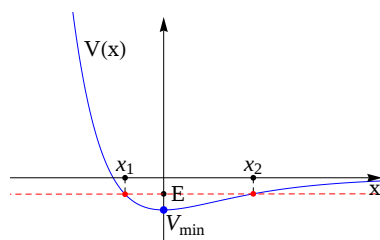
sklepamo, da ima V v $x = 0$ globalni minimum, ki je enak

$$V_{min} = V(0) = -A.$$

Iz lastnosti potenciala lahko o gibanju sklepamo naslednje:

- Gibanje je možno za energije $E \geq -A$.
- V točki $x = 0$ ima sistem stabilno ravnovesno lego.
- Gibanje je omejeno za energije $-A \leq E < 0$ in neomejeno pri energijah $E \geq 0$.

Poglejmo še graf potenciala.



(b) Izračunajmo sedaj periodo nihanja v primerih, ko je gibanje omejeno. To se zgodi pri energijah $-A \leq E < 0$. V primeru $E = -A$ točka miruje v stabilni ravnovesni legi, zato bodo za nas zanimive energije $-A < E < 0$.

Perioda nihanja materialne točke, ki se giblje pod vplivom potenciala V , je enaka

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}.$$

Tu smo privzeli, da ima točka energijo E in da se giblje po intervalu $[x_1, x_2]$.

Izberimo torej poljubno energijo $E \in (-A, 0)$. Z grafa potenciala lahko preberemo, da ima enačba $E = V(x)$ natanko dve rešitvi x_1 in x_2 , ki sta implicitno določeni z enačbo

$$E = Ae^{-2\alpha x_i} - 2Ae^{-\alpha x_i}.$$

Računajmo

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - A(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}))}}, \\ &= \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - Ae^{-2\alpha x} + 2Ae^{-\alpha x}}}. \end{aligned}$$

Na tem mestu uvedimo novo spremenljivko $s = e^{\alpha x}$, ki nam da $dx = \frac{ds}{\alpha s}$. Novi meji integracije s_1 in s_2 sta potem rešitvi kvadratne enačbe

$$Es_i^2 + 2As_i - A = 0,$$

integral pa se poenostavi v

$$T = \frac{\sqrt{2m}}{\alpha} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{Es^2 + 2As - A}}.$$

V tabeli nedoločenih integralov lahko preberemo, da za $a < 0$ in $D = b^2 - 4ac > 0$ velja

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{D}} \right) + C.$$

Če želimo izračunati določeni integral takšne iracionalne funkcije na intervalu med ničloma imenovalca, se stvari zelo poenostavijo. Ničli imenovalca sta namreč

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \\ x_2 &= \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \end{aligned}$$

od koder pa sledi, da je

$$\frac{2ax_1 + b}{\sqrt{D}} = 1,$$

$$\frac{2ax_2 + b}{\sqrt{D}} = -1.$$

To pomeni, da je

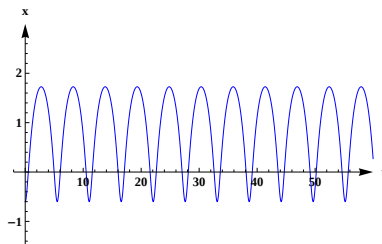
$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{D}} \right) \Bigg|_{x_1}^{x_2} = \frac{\pi}{\sqrt{-a}}.$$

V našem konkretnem primeru tako dobimo, da je perioda nihanja enaka

$$T = \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{|E|}}.$$

Periodo nihanja smo pri danem potencialu V lahko izračunali natančno. Kot vidimo, je odvisna od energije točke. Natančno gibanje točke pa je v splošnem težko izračunati analitično, vedno pa lahko trajektorijo točke izračunamo numerično.

Če vzamemo parametre $A = 2J$, $\alpha = 1m^{-1}$, $x_1 = -0.6m$ ter $m = 1kg$, lahko numerično določimo graf gibanja točke. Kot vidimo, je gibanje periodično, a ne harmonično. Točka bi v tem primeru večino časa preživela desno od ravnovesne lege.



(c) Kadar periode nihanja ne znamo izračunati natančno, si lahko pomagamo z naslednjo aproksimacijo. V okolici stabilne ravnovesne lege lahko potencial V aproksimiramo s kvadratnim Taylorjevim polinomom, da dobimo

$$V(x) \approx V(0) + \frac{1}{2}V''(0)x^2.$$

V našem primeru je

$$V''(x) = 2\alpha A(-\alpha e^{-\alpha x} + 2\alpha e^{-2\alpha x}),$$

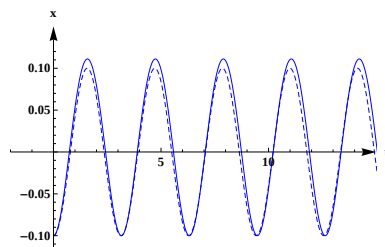
od koder sledi, da je $V''(0) = 2\alpha^2 A$. Drugi odvod $V''(0)$ igra vlogo koeficienta k pri Hookovem potencialu. Od tod lahko dobimo oceno za periodo (frekvenco) pri majhnih nihanjih okoli ravnovesne lege:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2\alpha^2 A}} = \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{A}}.$$

Če bo amplituda nihanja majhna, bo veljalo $|E| \approx A$, od koder sledi

$$\frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{|E|}} \approx \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{A}}.$$

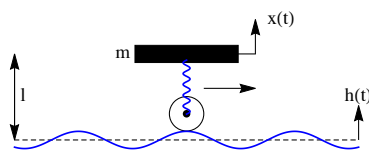
Na spodnji sliki sta prikazana grafa numerično izračunanega dejanskega gibanja ter pa harmonične aproksimacije gibanja v primeru $x_1 = -0.1m$ (s polno oziroma črtkano črto). Graf dejanskega gibanja zelo spominja na harmonično nihanje, je pa perioda nekoliko večja kot tista, ki smo jo dobili pri aproksimaciji.



□

- (4) Na vzmet s koeficientom k je pripeta materialna točka z maso m . Gibanje točke zavira blažilec s koeficientom c , nihanje pa ves čas vsiljujemo s silo kh_0 . Določi gibanje točke, če ta na začetku miruje v ravnovesni legi.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo spoznali 1/8-ki model avtomobilskega vzmetenja pri vožnji po neravni podlagi. Privzeli bomo, da je naš sistem sestavljen iz točke z maso m , ki modelira avto, vzmeti in pa blažilca. Obliko podlage bomo opisali s funkcijo $h = h(t)$, ravnovesno višino točke pri vožnji po ravni podlagi pa označimo z l .



Če privzamemo, da na točko deluje sila teže v navpični smeri, dobimo za ravnovesno višino pogoj

$$k(l_0 - l) = mg,$$

kjer je l_0 dolžina neraztegnjene vzmeti. Odmik točke od ravnovesne lege bomo označili z $x = x(t)$. Drugi Newtonov zakon lahko potem zapišemo v obliki

$$m\ddot{x} = F_{vz} + F_{bl} + F_g.$$

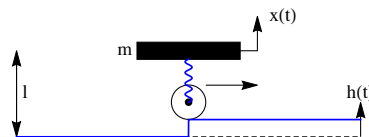
Na točko delujejo sila vzmeti $F_{vz} = -k(l + x - h(t) - l_0)$, sila blažilca $F_{bl} = -c(\dot{x} - \dot{h}(t))$ in sila teže $F_g = -mg$. Tako dobimo enačbo

$$m\ddot{x} = -k(l + x - h(t) - l_0) - c(\dot{x} - \dot{h}(t)) - mg,$$

oziroma

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kh(t) + c\dot{h}(t).$$

Opravka imamo z nehomogeno diferencialno enačbo drugega reda s konstantnimi koeficienti. Vidimo, da je člen na desni odvisen od oblike podlage. V preprostih primerih znamo rešitev poiskati analitično, sicer pa z uporabo numeričnih metod. V našem primeru bomo privzeli, da avto ob času $t = 0$ zapelje čez vertikalno stopnico višine h_0 in analizirali vertikalno nihanje avtomobila.



To pomeni, da je $h(t) = h_0$ in da rešujemo enačbo

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kh_0$$

pri začetnih pogojih $x(0) = 0$ in $\dot{x}(0) = 0$. Rešitev te enačbe lahko zapišemo v obliki vsote

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

kjer je x_h rešitev homogene enačbe, x_p pa neka partikularna rešitev nehomogene enačbe.

Partikularno rešitev lahko v našem primeru uganemo, saj enačbo reši konstantna funkcija $x_p(t) = h_0$. Za izračun rešitve homogene enačbe pa jo najprej zapišimo v obliki

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

kjer smo označili $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Pri reševanju takšnih enačb najprej napišemo karakteristično enačbo

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Rešitvama te kvadratne enačbe rečemo karakteristični števili. Splošna rešitev enačbe je odvisna od karakterističnih števil, zapišemo pa jo lahko v obliki:

- $x_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$, če sta $\lambda_1 \neq \lambda_2$ realni števili.
- $x_h(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t}$, če je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$.
- $x_h(t) = C_1 e^{\lambda t} \cos \omega t + C_2 e^{\lambda t} \sin \omega t$, če je $\lambda_1 = \lambda + i\omega$ in $\lambda_2 = \lambda - i\omega$.

V našem primeru sta karakteristični števili

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}.$$

V odvisnosti od parametra c se lahko zgodijo naslednje možnosti:

- $c = 0$ prosto nihanje,
- $c < 2m\omega_0$ podkritično dušenje,
- $c = 2m\omega_0$ kritično dušenje,
- $c > 2m\omega_0$ nadkritično dušenje.

Vidimo, da nadkritično dušenje ustreza primeru, ko sta karakteristični števili enačbe obe realni in različni. Pri kritičnem dušenju imamo eno dvojno realno ničlo, pri podkritičnem dušenju pa sta karakteristični števili konjugirani kompleksni števili.

V nadaljevanju bomo izračunali rešitev enačbe v odvisnosti od parametra c .

Podkritično dušenje:

Naj bo $c < 2m\omega_0$. Potem ima karakteristična enačba $\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \omega_0^2 = 0$ konjugirano kompleksni rešitvi:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{c}{2m} + i\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \lambda + i\omega, \\ \lambda_2 &= -\frac{c}{2m} - i\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \lambda - i\omega,\end{aligned}$$

kjer smo označili $\lambda = -\frac{c}{2m}$ in $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$. Splošna rešitev in njen odvod sta enaka

$$\begin{aligned}x(t) &= h_0 + C_1 e^{\lambda t} \cos \omega t + C_2 e^{\lambda t} \sin \omega t, \\ \dot{x}(t) &= C_1 \lambda e^{\lambda t} \cos \omega t - C_1 \omega e^{\lambda t} \sin \omega t + C_2 \lambda e^{\lambda t} \sin \omega t + C_2 \omega e^{\lambda t} \cos \omega t.\end{aligned}$$

Pri $t = 0$ dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned}h_0 + C_1 &= 0, \\ C_1 \lambda + C_2 \omega &= 0,\end{aligned}$$

ki ima rešitev $C_1 = -h_0$, $C_2 = \frac{\lambda}{\omega} h_0$. Rešitev diferencialne enačbe pa je

$$x(t) = h_0 - h_0 e^{\lambda t} \left(\cos \omega t - \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega t \right).$$

V oklepaju imamo vsoto sinusa in kosinusa z isto frekvenco. Takšno situacijo smatramo kot običajno nihanje, le da se spremenita amplituda in pa faza nihanja. Izraz v oklepaju lahko namreč zapišemo v obliki

$$\begin{aligned}\cos \omega t - \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega t &= \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2}}} \cos \omega t - \frac{\frac{\lambda}{\omega}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2}}} \sin \omega t \right), \\ &= \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2}} (\cos \delta \cos \omega t - \sin \delta \sin \omega t), \\ &= \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2}} \cos(\omega t + \delta).\end{aligned}$$

Začetna faza nihanja δ je definirana implicitno z enačbama

$$\begin{aligned}\cos \delta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2}}}, \\ \sin \delta &= \frac{\frac{\lambda}{\omega}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2}}}.\end{aligned}$$

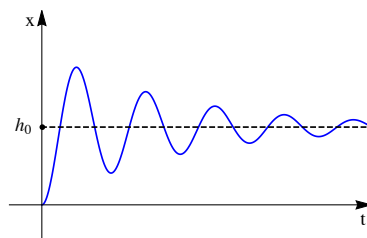
Od tod sledi, da je $\tan \delta = \frac{\lambda}{\omega}$. Podkritično dušeno nihanje lahko sedaj zapišemo v kompaktni obliki

$$x(t) = h_0 - h_0 \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2}} e^{\lambda t} \cos(\omega t + \delta).$$

Vidimo, da je krožna frekvenca dušenega nihanja

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$

nekoliko manjša kot pri prostem nihanju. Amplituda nihanja se zmanjšuje eksponentno s koeficientom $\lambda = -\frac{c}{2m}$, višina pa se asimptotsko približuje ravnovesni višini h_0 .



Kritično dušenje:

V primeru kritičnega dušenja je $c = 2m\omega_0$. Karakteristična enačba $\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \omega_0^2 = 0$ ima dvojno rešitev

$$\lambda = -\frac{c}{2m}.$$

V tem primeru sta

$$\begin{aligned} x(t) &= h_0 + (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}, \\ \dot{x}(t) &= \lambda C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{\lambda t} + C_2 \lambda t e^{\lambda t} \end{aligned}$$

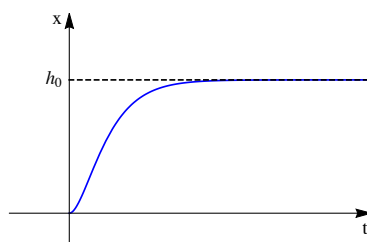
splošna rešitev oziroma njen odvod. Pri $t = 0$ dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} C_1 + h_0 &= 0, \\ \lambda C_1 + C_2 &= 0, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $C_1 = -h_0$, $C_2 = \lambda h_0$. Rešitev diferencialne enačbe je v tem primeru

$$x(t) = h_0 - h_0 e^{\lambda t} (1 - \lambda t).$$

V tem primeru se nihalo asimptotsko približuje ravnovesni legi, ne da bi jo prečkalo.



Nadkritično dušenje:

V tem primeru je $c > 2m\omega_0$. Karakteristična enačba $\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \omega_0^2 = 0$ ima dve različni realni rešitvi

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}, \\ \lambda_2 &= -\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}. \end{aligned}$$

Splošna rešitev in pa njen odvod sta enaka

$$\begin{aligned}x(t) &= h_0 + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ \dot{x}(t) &= C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}.\end{aligned}$$

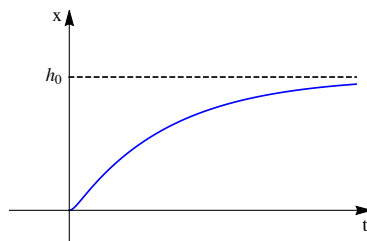
Tokrat dobimo pri $t = 0$ sistem enačb:

$$\begin{aligned}C_1 + C_2 + h_0 &= 0, \\ \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 &= 0,\end{aligned}$$

ki ima rešitev $C_1 = -\frac{\lambda_2 h_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$, $C_2 = -\frac{\lambda_1 h_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$. Nadkritično dušeno nihanje je torej dano s funkcijo

$$x(t) = h_0 - h_0 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} \right).$$

V tem primeru se nihalo iz začetne lege vrne v ravnovesno lego, ne da bi jo prečkalo, vendar pa se vrača dlje kot v primeru kritičnega dušenja.



□