

Pravične volitve?

2. del:
Proporcionalni volilni sistemi

Osnovni pojmi

- Volilni sistem: sistem pretvorbe glasov volilcev v predstavniške sedeže.
- Proporcionalni (sorazmerni) volilni sistem: izvoljenci (predstavniki, delegati, poslanci, ...) naj bodo predstavniki vseh volilcev. Volilni glasovi se ne izgubljajo.
- Za matematike, o proporcionalnem sistemu:
 - izvoljenci imajo različno veljavo pri odločanju (voljenju). Kakšen je zaradi tega rezultat volitev?
 - bolj kompliciran od večinskega.

Primeri uporabe

- Parlamentarne demokracije (večina demokratičnih držav). V Sloveniji volitve v Državni zbor.
- Varnostni svet ZN (5 stalnih članic z možnostjo uporabe veta in 10 nestalnih članic).
- Delniške družbe (ena delnica – en glas).

Primer 1: pojem volilne moči

- Ali imata B in C večjo volilno moč kot A?
- Predpostavka: vsak izmed predstavnikov bo vse svoje glasove uporabil za eno odločitev (vsi glasovi so ali »da« ali »ne«, ne pa mešano).

predstavnik	glasovi
A	4
B	5
C	5
vsota glasov	14
abs. večina glasov	8

- Kaj pa, če je potrebna $2/3$ večina?

predstavnik	glasovi
A	4
B	5
C	5
vsota glasov	14
potrebno št. glasov	10

- Ali pa $\frac{3}{4}$ večina?

predstavnik	glasovi
A	4
B	5
C	5
vsota glasov	14
potrebno št. glasov	11

- V prvem primeru so potrebni glasovi katerikoli dveh izmed treh predstavnikov, da je bila odločitev sprejeta. Vsi trije predstavniki imajo enako volilno moč.
- V drugem primeru so dovolj glasovi B in C za sprejem odločitve. Koalicija A z B ali C ni dovolj za sprejem. Volilna moč A je nič, saj je lahko odločitev sprejeta tudi proti volji A.
- V tretjem primeru so nujno potrebni glasovi vseh treh predstavnikov za sprejem odločitve. Veto kateregakoli predstavnika povzroči nesprejem odločitve. Zopet imajo vsi trije predstavniki enako volilno moč.

Ugotovitev:

- Ugotavljanje volilne moči v proporcionalnih volilnih sistemih je bolj zahtevno, kot enostavno ugotavljanje deleža volilnih glasov.

Kako matematično določiti volilno moč?

- Ugotoviti, kolikšno volilno moč ima predstavnik. Posebno je pomembno ali ima:
 - diktatorsko moč,
 - moč veta,
 - nobene moči.

Označevanje

- Pri odločanju sodeluje n predstavnikov $P_1, P_2, \dots, P_n$.
- i -ti predstavnik ima w_i glasov, $i = 1, n$. Vsota glasov vseh predstavnikov je $V = w_1 + w_2 + \dots + w_n$.
- Prag odločanja: q glasov. Prag je običajno večji od $\frac{1}{2}$ vseh glasov V : $V/2 < q \leq V$.
- Označevanje: $[q; w_1, w_2, \dots, w_n]$.

Iz primera 1: $n=3$, $w_1=5$, $w_2=5$, $w_3=4$ (razvrstitev po padajočem številu glasov), $V=14$, $7 < q \leq 14$, $q=8$,

označba: $[8; 5,5,4]$.

Primer 2: diktator

- Je kdo diktator?

predstavnik	glasovi
A	4
B	5
C	5
D	26
vsota glasov	40
abs. večina glasov	21

- Diktator je predstavnik, katerega število glasov je večje ali enako pragu odločanja.

$$w_i \geq q$$

pri pogoju: $V/2 < q \leq V$.

Skrajšane oznake iz prejšnje tabele: [21; 26, 5, 5, 4].

Predstavnik $D = P_1$ je diktator.

- Kaj pa pri $2/3$ pragu odločanja (27 glasov)?

Moč veta

- Moč veta ima i -ti predstavnik, brez čigar privolitve (w_i glasov) se odločitev ne more sprovesti.

$$V - w_i < q$$

Primer: [16; 8, 7, 3, 2]

Predstavnik P_1 in P_2 imata moč veta.

- Vsak diktator ima moč veta, nima pa vsak z močjo veta tudi diktatorske moči.

Predstavnik brez volilne moči

- Brez volilne moči je tisti, čigar odločitev ne more spremeniti skupne odločitve.

Iz Primera 1: [10; 5, 5, 4]

Predstavnik P_3 nima nobene volilne moči.

Iz Banzhafove študije 1965: [16; 9, 9, 7, 3, 1, 1] (Wikipedia)

Predstavniki P_4 , P_5 in P_6 nimajo nobene volilne moči.

Koalicija

- Katerakoli zveza predstavnikov;
podmnožica množice $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$.
- Teža koalicije: vsota števila glasov članov koalicije.
- Zmagovalna koalicija: teža je vsaj enaka q (pragu odločanja).

Iz Primera 1: $[10; 5, 5, 4]$ sta zmagovalni koaliciji:
 $\{P_1, P_2\}$ in $\{P_1, P_2, P_3\}$.

Iz Banzhafove študije: $[16; 9, 9, 7, 3, 1, 1]$ sta dve izmed 32
zmagovalnih koalicij: $\{P_2, P_3\}$ in $\{P_1, P_3, P_5\}$.

- Koliko je možnih koalicij?

$$n = 1, \quad \{ \} \text{ in } \{P_1\},$$

$$n = 2, \quad \{ \}, \{P_1\}, \{P_2\}, \{P_1, P_2\},$$

$$n = 3, \quad \{ \}, \{P_1\}, \{P_2\}, \{P_3\}, \{P_1, P_2\}, \{P_2, P_3\}, \{P_3, P_1\}, \\ \{P_1, P_2, P_3\}.$$

$$\text{Število koalicij} = 2^n.$$

Opomba: nekateri $\{ \}$ ne štejejo med koalicije. Za njih je število koalicij $= 2^n - 1$.

- Koalicijska tabela za Primer 1: [8; 5, 5, 4]

P_3	P_2	P_1	koalicija	teža	zmagovalna?
0	0	0	$\{ \}$	0	ne
0	0	1	$\{P_1\}$	5	ne
0	1	0	$\{P_2\}$	5	ne
0	1	1	$\{P_1, P_2\}$	10	da
1	0	0	$\{P_3\}$	4	ne
1	0	1	$\{P_3, P_1\}$	9	da
1	1	0	$\{P_2, P_3\}$	9	da
1	1	1	$\{P_1, P_2, P_3\}$	14	da

- Koalicijska tabela za Primer 1: [11; 5, 5, 4]

P_3	P_2	P_1	koalicija	teža	zmagovalna?
0	0	0	$\{ \}$	0	ne
0	0	1	$\{P_1\}$	5	ne
0	1	0	$\{P_2\}$	5	ne
0	1	1	$\{P_1, P_2\}$	10	ne
1	0	0	$\{P_3\}$	4	ne
1	0	1	$\{P_3, P_1\}$	9	ne
1	1	0	$\{P_2, P_3\}$	9	ne
1	1	1	$\{P_1, P_2, P_3\}$	14	da

Primer 3: zmagovalne koalicije dveh sistemov štetja glasov

- Ali so zmagovalne iste koalicije po sistemih
[10; 5, 5, 4] in [60; 44, 22, 11] ?

	[10; 5, 5, 4]		[60; 44, 22, 11]	
koalicija	teža	zmagovalna?	teža	zmagovalna?
$\{ \}$	0	ne	0	ne
$\{P_1\}$	5	ne	44	ne
$\{P_2\}$	5	ne	22	ne
$\{P_1, P_2\}$	10	da	66	da
$\{P_3\}$	4	ne	11	ne
$\{P_3, P_1\}$	9	ne	55	ne
$\{P_2, P_3\}$	9	ne	33	ne
$\{P_1, P_2, P_3\}$	14	da	77	da

- Iste zmagovalne koalicije, ekvivalentna sistema.

Kritični predstavnik

- Je del zmagovalne koalicije.
- Njegovo sodelovanje v koaliciji je nujno, da le-ta ostane zmagovalna.

Primer: [11; 7, 5, 4]

zmagovalna koalicija	teža	kritični predstavnik
$\{P_1, P_2\}$	$7+5 = 12$	P_1, P_2
$\{P_3, P_1\}$	$4+7 = 11$	P_3, P_1
$\{P_1, P_2, P_3\}$	$7+5+4 = 16$	P_1

Merjenje volilne moči

- V kolikih koalicijah lahko predstavnik spremeni zmagovitost koalicije, oz. kolikokrat je predstavnik v množici kritičnih?

predstavnik	kritičnost $N_k(P_i)$
P_1	3
P_2	1
P_3	1
Vsota	5

Banzhafov indeks volilne moči

- Relativni Banzhafov indeks i -tega predstavnika:

$$B_r(P_i) = \frac{N_k(P_i)}{N_k(P_1) + N_k(P_2) + \dots + N_k(P_n)}$$

predstavnik	kritičnost N_k	B_r
P_1	3	3/5
P_2	1	1/5
P_3	1	1/5
Vsota	5	5/5

- Vsota relativnih Banzhafovih indeksov:

$$\sum_i^n B_r(P_i) = 1$$

- Banzhaf ni edini avtor:

Lionel Penrose (1946): "The Elementary Statistics of Majority Voting"

John Banzhaf (1965): "Weighted Voting Doesn't Work"

James Coleman (1971): "Control of Collectives and the Power of a Collectivity to Act"

- Imenovan tudi Penrose-Banzhaf ali Banzhaf-Coleman indeks.

Ponovitev primera 1: izračun Banzhafovih indeksov

- Primer [8; 5, 5, 4]

zmagovalna koalicija	teža	kritični predstavnik
$\{P_1, P_2\}$	$5+5 = 10$	P_1, P_2
$\{P_2, P_3\}$	$5+4 = 9$	P_2, P_3
$\{P_3, P_1\}$	$4+5 = 9$	P_3, P_1
$\{P_1, P_2, P_3\}$	$5+5+4 = 14$	<i>nihče</i>

predstavnik	kritičnost N_k	B_r
P_1	2	2/6
P_2	2	2/6
P_3	2	2/6
Vsota	6	6/6

- Vsi trije predstavniki imajo enako volilno moč.

• Primer [10; 5, 5, 4]

zmagovalna koalicija	teža	kritični predstavnik
$\{P_1, P_2\}$	$5+5 = 10$	P_1, P_2
$\{P_1, P_2, P_3\}$	$5+5+4 = 14$	P_1, P_2

predstavnik	kritičnost N_k	B_r
P_1	2	2/4
P_2	2	2/4
P_3	0	0
Vsota	4	4/4

- Primer [11; 5, 5, 4]

zmagovalna koalicija	teža	kritični predstavnik
$\{P_1, P_2, P_3\}$	$5+5+4 = 14$	P_1, P_2, P_2

predstavnik	kritičnost N_k	B_r
P_1	1	1/3
P_2	1	1/3
P_3	1	1/3
Vsota	3	3/3

- Komentar: predstavniki P_1 , P_2 in P_3 imajo v primerih $[8; 5, 5, 4]$ in $[11; 5, 5, 4]$ enake Banzhafove indekse, kar pa ne pomeni, da so tudi zmagovalne koalicije iste.

Ponovitev primera 2: izračun Banzhafovih indeksov

- Primer $[21; 26, 5, 5, 4]$.
- Vse zmagovalne koalicije vključujejo P_1 .
- V vsaki zmagovalni koaliciji je P_1 kritični član, preostali pa ne.
- Vse kritičnosti dosega samo P_1 , zato ima $B_r(P_1) = 1$ (100%).
- Preostali člani koalicij in nečlani imajo indeks $B_r = 0$.

Primer 4:

- Primer [10; 8, 4, 2, 1]

zmagovalna koalicija	teža	kritični predstavnik
$\{P_1, P_2\}$	$8+4 = 12$	P_1, P_2
$\{P_1, P_3\}$	$8+2 = 10$	P_1, P_3
$\{P_1, P_2, P_3\}$	$8+4+2 = 14$	P_1
$\{P_1, P_2, P_4\}$	$8+4+1 = 13$	P_1, P_2
$\{P_1, P_3, P_4\}$	$8+2+1 = 11$	P_1, P_3
$\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$	$8+4+2+1 = 15$	P_1

predstavnik	kritičnost N_k	B_r
P_1	6	3/5
P_2	2	1/5
P_3	2	1/5
P_4	0	0
Vsota	10	5/5

- P_1 ima moč veta, saj je kritičen v vseh zmagovalnih koalicijah.
- P_2 in P_3 imata enako volilno moč, čeprav z različnim deležem glasov.

Primer 5: združevanje predstavnikov

- Združimo P_2 in P_3 , dobimo $[10; 8, 4+2, 1]$

zmagovalna koalicija	teža	kritični predstavnik
$\{P_1, P_2+P_3\}$	$8+6 = 14$	P_1, P_2+P_3
$\{P_1, P_2+P_3, P_4\}$	$8+6+1 = 15$	P_1, P_2+P_3

predstavnik	kritičnost N_k	B_r
P_1	2	1/2
P_2+P_3	2	1/2
P_4	0	0
Vsota	4	2/2

- Združevanje P_2+P_3 jima je koristilo, saj je njun skupni Banzhafov indeks večji od vsote nezdruženih indeksov:

$$B_r(P_2+P_3) = 1/2 > 2/5 = 1/5 + 1/5 = B_r(P_2) + B_r(P_3)$$
- Zgornja ugotovitev ni splošno veljavna v vseh primerih združevanj.

Primer 5: Varnostni svet ZN

- 5 stalnih članic: Francija, Kitajska, Rusija, Velika Britanija, ZDA.
- 10 nestalnih članic, voljenih za dvoletni mandat: Estonija, Indija, Irska, Kenija, Mehika, Niger, Norveška, St. Vincent, Tunizija, Vietnam (stanje 2021).
- Za izglasovanje ukrepa je potrebnih 9 glasov, vključujoč vseh 5 stalnih članic. Te imajo torej pravico veta.
- Kolikšen je Banzhafov indeks posameznih članic?

- Število koalicij = $2^{15}=32768$. Preveč, za ročno sestavljanje koalicijske tabele.
- Vsaka zmagovalna koalicija mora vsebovati **vseh pet stalnih članic** in **vsaj štiri nestalne**.
- Stalne članice so medsebojno enake po volilni moči.
- Nestalne članice so medsebojno enake po volilni moči.
- Stalna članica je kritična v vseh koalicijah, kjer so prisotne **vsaj štiri nestalne članice**. Takšnih koalicij je 848 (izmed $2^{10}=1024$).
Za izračun števila koalicij glej: koalicijeVSOZN.xlsx.
- Nestalna članica je kritična v vseh koalicijah, kjer so poleg nje prisotne še **točno** tri nestalne članice od preostalih devetih nestalnih članic. Takšnih koalicij je 84 (izmed $2^9=512$).

- Relativni Banzhafov indeks za katerokoli izmed stalnih članic:

$$B_r(P_{stalne}) = \frac{848}{(5 \times 848) + (10 \times 84)} = \frac{848}{5080} \approx 0,1669$$

- Relativni Banzhafov indeks za katerokoli izmed nestalnih članic:

$$B_r(P_{nestalne}) = \frac{84}{(5 \times 848) + (10 \times 84)} = \frac{84}{5080} \approx 0,0165$$

- Razmerje volilne moči stalnih : nestalnim članicam $\approx 10 : 1$

Primer 6: utežni faktorji članic VS

- Glasovalni sistem VS OZN želimo prikazati v obliki:

$$[q ; w_{s1}, w_{s2}, \dots, w_{ns}, w_{n1}, w_{n2}, \dots, w_{nn}]$$

ns ... število stalnih članic VS (imajo veto) = 5,

nn ... število nestalnih članic VS = 10,

q ... prag odločanja $\neq 9$.

Število potrebnih članic za izglasovanje ukrepa: $gl = 9$.

Privzamemo: $w_{n1} = w_{n2} = \dots = w_{nn} = w_n$ in

$$w_{s1} = w_{s2} = \dots = w_{ns} = w_s$$

- Vsota vseh glasov je: $V = ns \times w_s + nn \times w_n$
- Prag odločanja: $q = ns \times w_s + (gl - ns) \times w_n$
- Moč veta ima tisti, ki: $V - w_i < q$, oz.: $V - w_s < q$

Predpostavka: velikost w_s je komaj zadostna za izpolnitev neenačbe $V - w_s < q$. Če w_s zmanjšamo za 1 glas (povečamo levo stran neenačbe), neenačba ni več izpolnjena. Dobimo enačbo:

$$V - (w_s - 1) = q, \quad \text{oz.:} \quad w_s = V - q + 1$$

- Vstavimo V in q :

$$w_s = ns \times w_s + nn \times w_n - [ns \times w_s + (gl - ns) \times w_n] + 1$$

$$w_s = w_n (ns + nn - gl) + 1$$

- Privzamemo: $w_n = 1$. Dobimo:

$$w_s = 1 (5 + 10 - 9) + 1 = 7$$

$$q = 5 \times 7 + (9 - 5) \times 1 = 39$$

- Glasovalni sistem VS OZN je torej:

[39; 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

Zaporedna koalicija

- Običajna koalicija: vsi predstavniki hkrati osnujejo koalicijo.
Npr.: $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ vrstni red (za matematika) ni pomemben.
- Zaporedna koalicija: predstavniki vstopajo v koalicijo eden po eden (zaporedoma).
Npr.: $\langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$ vrstni red postane pomemben.

$$\langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle \neq \langle P_1, P_3, P_2, P_4 \rangle$$

V zaporedni koaliciji morajo biti vsebovani **vsi** predstavniki.

Pazi na oznake $\{ \}$ oz. $\langle \rangle$.

Ključni predstavnik (pivot)

- Predstavnik, pri katerem teža zaporedne koalicije, ki narašča s postopnim vključevanjem novih članov, doseže (ali prvič preseže) prag odločanja q .
- Primer [17; 6, 4, 3, 3, 2, 1, 1]
 - P_4 predlaga nov ukrep, število glasov $3 < 17$,
 - P_6 se strinja s predlogom, pristopi h koaliciji, teža koalicije $3+1 = 4 < 17$,
 - P_1 pristopi h koaliciji, teža koalicije $4+6 = 10 < 17$,
 - P_5 pristopi, teža koalicije $10+2 = 12 < 17$,
 - P_2 pristopi, teža koalicije $12+4 = 16 < 17$,
 - P_3 pristopi, teža koalicije $16+3 = 19 > 17 \rightarrow$ pivot,
 - P_7 pristopi, teža koalicije $19+1 = 20 > 17$.

Število zaporednih koalicij in število pivotiranj

- Primer [11; 7, 5, 4]

zaporedna koalicija	teža	pivot
$\langle P_1, P_2, P_3 \rangle$	7, 12, 16	P_2
$\langle P_1, P_3, P_2 \rangle$	7, 11, 16	P_3
$\langle P_2, P_1, P_3 \rangle$	5, 12, 16	P_1
$\langle P_2, P_3, P_1 \rangle$	5, 9, 16	P_1
$\langle P_3, P_1, P_2 \rangle$	4, 11, 16	P_1
$\langle P_3, P_2, P_1 \rangle$	4, 9, 16	P_1

- Število pivotiranj: $N_p(P_1) = 4$, $N_p(P_2) = 1$, $N_p(P_3) = 1$.

- Število zaporednih koalicij za n predstavnikov:
 - n predstavnikov ima možnost, da pristopijo prvi,
 - $(n - 1)$ jih ima možnost, da pristopijo drugi,
 - $(n - 2)$ pa lahko postanejo tretjepristopniki,
 - ...
 - 2 zadnja predstavnika, eden je predzadnji član koalicije,
 - 1 preostali pa se pridruži zadnji.

Število zaporednih koalicij:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$$

Število običajnih koalicij: 2^n .

Shapley-Shubikov indeks volilne moči

- Shapley-Shubikov indeks (1954):

$$SS(P_i) = \frac{N_p(P_i)}{n!}$$

- Vsota Shapley-Shubikovih indeksov:

$$\sum_i^n SS(P_i) = 1$$

- Iz primera [11; 7, 5, 4]:
 $SS(P_1) = N_p(P_1)/n! = 4/6$
 $SS(P_2) = N_p(P_2)/n! = 1/6$
 $SS(P_3) = N_p(P_3)/n! = 1/6$

Ponovitev primera 1: izračun Shapley-Shubikovich indeksov

- Primer [8; 5, 5, 4]

zaporedna koalicija	teža	pivot
$\langle P_1, P_2, P_3 \rangle$	5, 10, 14	P_2
$\langle P_1, P_3, P_2 \rangle$	5, 9, 14	P_3
$\langle P_2, P_1, P_3 \rangle$	5, 10, 14	P_1
$\langle P_2, P_3, P_1 \rangle$	5, 9, 14	P_3
$\langle P_3, P_1, P_2 \rangle$	4, 9, 14	P_1
$\langle P_3, P_2, P_1 \rangle$	4, 9, 14	P_2

$$N_p(P_1) = N_p(P_2) = N_p(P_3) = 2$$

$$SS(P_1) = SS(P_2) = SS(P_3) = 2/6 = 1/3 \quad (\text{enako, kot } B_r)$$

• Primer [10; 5, 5, 4]

zaporedna koalicija	teža	pivot
$\langle P_1, P_2, P_3 \rangle$	5, 10, 14	P_2
$\langle P_1, P_3, P_2 \rangle$	5, 9, 14	P_2
$\langle P_2, P_1, P_3 \rangle$	5, 10, 14	P_1
$\langle P_2, P_3, P_1 \rangle$	5, 9, 14	P_1
$\langle P_3, P_1, P_2 \rangle$	4, 9, 14	P_2
$\langle P_3, P_2, P_1 \rangle$	4, 9, 14	P_1

$$N_p(P_1) = N_p(P_2) = 3, \quad N_p(P_3) = 0$$

$$SS(P_1) = SS(P_2) = 3/6 = 1/2, \quad SS(P_3) = 0 \quad (\text{enako, kot } B_r)$$

- Primer [11; 5, 5, 4]

zaporedna koalicija	teža	pivot
$\langle P_1, P_2, P_3 \rangle$	5, 10, 14	P_3
$\langle P_1, P_3, P_2 \rangle$	5, 9, 14	P_2
$\langle P_2, P_1, P_3 \rangle$	5, 10, 14	P_3
$\langle P_2, P_3, P_1 \rangle$	5, 9, 14	P_1
$\langle P_3, P_1, P_2 \rangle$	4, 9, 14	P_2
$\langle P_3, P_2, P_1 \rangle$	4, 9, 14	P_1

$$N_p(P_1) = N_p(P_2) = N_p(P_3) = 2$$

$$SS(P_1) = SS(P_2) = SS(P_3) = 2/6 = 1/3 \quad (\text{enako, kot } B_r)$$

- Ugotovitev: podobno, kot Banzhafov indeks, tudi Shapley-Shubikov indeks v nekaterih primerih ne razlikuje nenakih volilnih sistemov, npr.: [8; 5, 5, 4] in [11; 5, 5, 4].

Ponovitev primera 2: izračun Shapley-Shubikovich indeksov

- Primer $[21; 26, 5, 5, 4]$.
- Je potrebno pregledati $4! = 24$ zaporednih koalicij?
- Ne. V vseh koalicijah je P_1 pivot.
- $N_p(P_1) = 24$, $N_p(P_2) = N_p(P_3) = N_p(P_4) = 0$
- $SS(P_1) = 1$, $SS(P_2) = SS(P_3) = SS(P_4) = 0$
- Ugotovitev: enako, kot Banzhafov indeks, tudi Shapley-Shubikov indeks zagotovo določi diktatorja in predstavnika brez volilne moči.

Ponovitev primera 5: SS indeksi Varnostnega sveta ZN

- V številkah:

n ... število članic VS = 15,

ns ... število stalnih članic VS (imajo veto) = 5,

nn ... število nestalnih članic VS = 10,

gl ... število članic, potrebnih za izglasovanje ukrepa = 9.

- Število zaporednih koalicij: $15! = 1.307.674.368.000$

Opomba: število koalicij po Banzhafu je samo $2^{15}=32.768$.

- Shapley-Shubikov indeks za katerokoli izmed nestalnih članic:

$$SS(P_{nestalne}) = \binom{nn-1}{gl-ns-1} \frac{(gl-1)! (n-gl)!}{n!}$$

$$SS(P_{nestalne}) = \binom{10-1}{9-5-1} \frac{(9-1)! (15-9)!}{15!} = 84 \frac{40320 \times 720}{1.307.674.368.000}$$

$$SS(P_{nestalne}) = 0,001865$$

- Shapley-Shubikov indeks za katerokoli izmed stalnih članic:

$$ns \times SS(P_{stalne}) + nn \times SS(P_{nestalne}) = 1$$

$$SS(P_{stalne}) = \frac{1 - 10 \times 0,001865}{5} = \frac{0,98135}{5} = 0,19627$$

- Razmerje volilne moči stalnih : nestalnim članicam $\approx 100 : 1$

V razmislek: smisel takšnega varnostnega sveta OZN,

sploh če vemo da:

- so največje izvoznice orožja v zadnjih desetletjih:

Vir: Wikipedia, tam pa je
povzeto po: Stockholm
International Peace Research
Institute

1950–2017 Rank ▲	Supplier ◆	Arms Exp (in billion TIV) ◆
1	 United States	673,010
2	 Russia	588,150
3	 United Kingdom	140,380
4	 France	120,700
5	 Germany	85,980
6	 China	58,090
7	 Italy	32,270
8	 Czech Republic	31,250
9	 Netherlands	24,010
10	 Israel	16,790

Primer 7: Evropski svet (European Council)

- Viri: [2], Wikipedia
- Vsaka članica ima en glas. Glasovalni prag se spreminja glede na to, ali je pobuda prišla s strani Evropske komisije ali Visokega predstavnika za zunanje zadeve in varnostno politiko (1) ali pa je pobuda prišla od druge (2).
 - 1) 55% (16 od 28 članic, oz. 15 od 27 po Brexitu), ki skupaj predstavljajo vsaj 65% populacije EU (cca. 330 od 507 mio),
 - 2) 72% (21 od 28 članic, oz. 20 od 27 po Brexitu), ki skupaj predstavljajo vsaj 65% populacije EU,
 - 3) pobudo lahko blokirajo 4 ali več članic, ki skupaj predstavljajo vsaj 35% populacije EU (cca. 177 od 507 mio).

● Populacija članice in projekcija rasti postaneta pomembni

Rank ↕	Country (or dependent territory) ↕	July 1, 2015 projection ^[Note 1] ↕	% of pop. ↕	Average relative annual growth (%) ^[Note 2] ↕	Average absolute annual growth ^[Note 3] ↕	Estimated doubling time (Years) ^[Note 4] ↕
1	 Germany	81,276,000	16.03	0.32	256,000	220
2	 France ^[Note 5]	67,107,000	13.23	0.45	288,000	154
3	 United Kingdom	65,093,000	12.90	0.77	495,000	91
4	 Italy	60,851,000	12.00	0.48	290,000	145
5	 Spain	46,404,000	9.15	-0.15	-72,000	-
6	 Poland	38,494,000	7.59	0.05	20,000	1,334
21	 Croatia	4,230,000	0.83	-0.31	-13,000	-
22	 Lithuania	2,903,000	0.57	-0.92	-27,000	-
23	 Slovenia	2,064,000	0.41	0.15	3,000	477
24	 Latvia	1,980,000	0.39	-0.85	-17,000	-
25	 Estonia	1,315,000	0.26	0.46	6,000	152
26	 Cyprus	846,000	0.17	-0.94	-8,000	-
27	 Luxembourg	570,000	0.11	2.52	14,000	28
28	 Malta	425,000	0.08	0.47	2,000	147
	Total	507,010,000	100.00	0.27	1,355,000	259

Primer 7: Državni zbor RS

- $88 + 2$ poslanca narodnostnih manjšin,
 - $88 = 8$ volilnih enot $\times$ 11 poslancev na enoto,
 - v volilni enoti 11 okrajev (posebnost Slovenije).
-
- Načeloma naj bi v DZ iz vsakega volilnega okraja sedel po en poslanec.

- Volilne enote



Potek razdeljevanja poslanskih sedežev

- 1) Seštejejo se glasovi na državni ravni in razporedijo po strankah.
- 2) Glasovi strank, ki ne dosegajo volilnega praga (4% veljavnih glasov) se odstranijo iz nadaljnega postopka (2018 je bilo 12,11% izgubljenih glasov).
- 3) Na ravni države se skupno število veljavnih glasov deli po d'Hondtovi metodi (ki rahlo favorizira velike stranke). Tako stranka dobi na ravni države $w_{stranka, drž}$ poslancev.

Za volitve v DZ leta 2018 glej [4] in "volitveDZ-2018.xlsx".

Primer: med 4 stranke razdeli 8 poslanskih sedežev

stranka	število glasov	delež od vsote	sedeži sorazmerni z glasovi	delež po d'Hondtu
P_1	10000	0,455	3,64	4
P_2	8000	0,364	2,91	3
P_3	3000	0,136	1,09	1
P_4	1000	0,045	0,36	0

d'Hondtov postopek:

št.glasov deli z	P_1	P_2	P_3	P_4
1	10000	8000	3000	1000
2	5000	4000	1500	500
3	3333	2667	1000	333
4	2500	2000	750	250
5	2000	1600	600	200

Razporeditev 8 največjih števil v tabeli predstavlja razporeditev 8 sedežev.

- 4) Na ravni volilnih enot se skupno število veljavnih glasov x_i v enoti i deli s številom poslancev na enoto, t.j. z 11, povečanim za 1, ter zaokroži navzgor (Droopov količnik):

$$x_{Droop,i} = \frac{x_i}{11 + 1}$$

$x_{Droop,i}$... število glasov, potrebnih za izvolitev enega poslanca v volilni enoti i .

Primer: DZ volitve 2018, volilna enota 1 - Kranj

$$x_1 = 28958 + 20108 + \dots + 187 + 180 = 115062$$

$$x_{Droop,1} = \frac{115062}{11 + 1} = 9588,5 \rightarrow 9589$$

Število poslanskih sedežev w stranke v volilni enoti i :

$w_{stranka, i} = \text{število glasov za stranko}_i / x_{Droop, i}$, zaokroženo navzdol

npr.: SDS, 28958 glasov

$$w_{SDS, 1} = 28958 / 9589 = 3,0199 \rightarrow 3$$

Neuporabljeni glasovi

$$\alpha_{SDS, 1} = 28958 - 3 \times 9589 = 191$$

se upoštevajo pri delitvi manjkajočih mandatov dotične stranke na ravni države.

5) Običajno je seštevek strankinih poslanskih mest po vseh 8 volilnih enotah manjši od poslanskih mest stranke, izračunanih po d'Hondtovi metodi na ravni države.

$$w_{stranka, 1} + w_{stranka, 2} + \dots + w_{stranka, 8} < w_{stranka, drž}$$

Razliko

$$w_{stranka, drž} - (w_{stranka, 1} + w_{stranka, 2} + \dots + w_{stranka, 8}) = a_{stranka}$$

se popolni v a volilnih enotah začeni z volilno enoto z največjim številom neuporabljenih glasov.

Indeksi volilne moči v DZ po volitvah 2018

- Volilna sistema: [46; 25, 13, 10, 10, 9, 7, 5, 5, 4, 1, 1] in
[61; 25, 13, 10, 10, 9, 7, 5, 5, 4, 1, 1]
- Banzhafov in Shapley-Shubikov indeks:

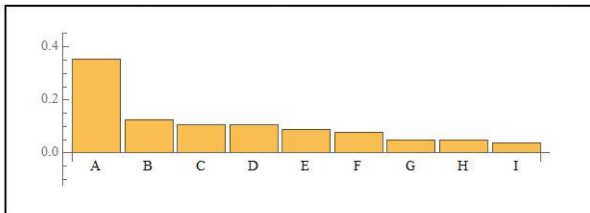
Uporaba predelanega Wolfram Presentations:
PowerInWeightedVotingSystems-author2.nb

- Volilna moč strank v DZ 2018 (brez dveh poslancev manjšin)

For the weighted voting system [45; 25, 13, 10, 10, 9, 7, 5, 5, 4],

Banzhaf power is distributed as follows:

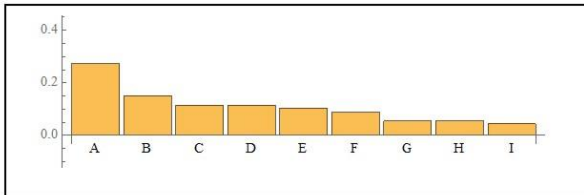
name of player	proportion of votes held by player	no. of winning coalitions in which player is critical	Banzhaf power index of player
A	0.284	177	0.355
B	0.148	63	0.126
C	0.114	53	0.106
D	0.114	53	0.106
E	0.102	45	0.0902
F	0.0795	39	0.0782
G	0.0568	25	0.0501
H	0.0568	25	0.0501
I	0.0455	19	0.0381



- Volilna moč strank v DZ 2018 (brez dveh poslancev manjšin)

For the weighted voting system [60, 25, 13, 10, 10, 9, 7, 5, 5, 4],
Banzhaf power is distributed as follows:

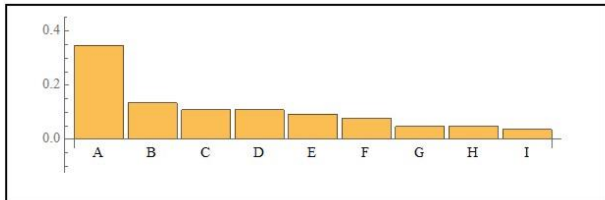
name of player	proportion of votes held by player	no. of winning coalitions in which player is critical	Banzhaf power index of player
A	0.284	103	0.273
B	0.148	57	0.151
C	0.114	43	0.114
D	0.114	43	0.114
E	0.102	39	0.103
F	0.0795	33	0.0875
G	0.0568	21	0.0557
H	0.0568	21	0.0557
I	0.0455	17	0.0451



- Volilna moč strank v DZ 2018 (brez dveh poslancev manjšin)

For the weighted voting system [45, 25, 13, 10, 10, 9, 7, 5, 5, 4],
the Shapley–Shubik power is distributed as follows:

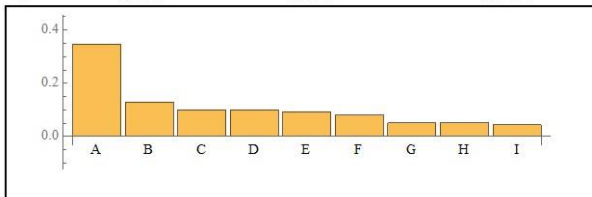
name of player	proportion of votes held by player	no. of coalitions in which player is pivotal	Shapley–Shubik power index of player
A	0.284	126 000	0.347
B	0.148	48 672	0.134
C	0.114	39 600	0.109
D	0.114	39 600	0.109
E	0.102	33 552	0.0925
F	0.0795	27 936	0.0770
G	0.0568	17 136	0.0472
H	0.0568	17 136	0.0472
I	0.0455	13 248	0.0365



- Volilna moč strank v DZ 2018 (brez dveh poslancev manjšin)

For the weighted voting system $[60 : 25, 13, 10, 10, 9, 7, 5, 5, 4]$,
the Shapley–Shubik power is distributed as follows:

name of player	proportion of votes held by player	no. of coalitions in which player is pivotal	Shapley–Shubik power index of player
A	0.284	126288	0.348
B	0.148	47232	0.130
C	0.114	36432	0.100
D	0.114	36432	0.100
E	0.102	33840	0.0933
F	0.0795	29088	0.0802
G	0.0568	18720	0.0516
H	0.0568	18720	0.0516
I	0.0455	16128	0.0444



- Komentar: za razliko od VS OZN pa v primeru DZ Banzhafov in Shapley-Shubikov indeks podata približno enaka razmerja volilnih moči med strankami.

Nekatere posebnosti volilnega sistema v DZ

- Ustava Republike Slovenije, 80. člen (sestava in volitve), 5. odstavek: *»Poslanci, razen poslancev narodnih skupnosti, se volijo po načelu sorazmernega predstavnštva ob štiriodstotnem volilnem pragu za vstop v Državni zbor, pri čemer imajo volivci odločilen vpliv na dodelitev mandatov kandidatom.«*
- O načelu sorazmernega predstavnštva:
 - Okraji ni nujno, da imajo svojega zastopnika v DZ. V 2014 21 izmed 88 okrajev, oz. 416.000, t.j. 24,4% volilnih upravičencev ni imelo svojega zastopnika v DZ .
 - V isti volilni enoti so volilni okraji bistveno različnih velikosti (ekstrem: 26800 : 8300 glasov).
 - V 2014 je bil izvoljen poslanec s samo 523 glasovi volilcev in ni bil izvoljen kandidat s 5425 glasovi.

- O odločilnem vplivu na dodelitev mandatov kandidatom:
 - Volivci volijo posamezne kandidate, a se glasovi pripišejo listam, ki jih kandidati zastopajo. Torej imajo volivci odločilen vpliv na dodelitev mandatov strankam, ne pa kandidatom.

Volilne enote in volilna geometrija

- Volilne enote in okraji naj bi vsebovali približno enako število volivcev (enakomerno predstavništvo).
- Nenamerno ali pa namerno so marsikdaj volilne enote in okraji oblikovani na zemljevidu tako, da diskriminirajo določeno skupino volilcev.
- *Malapportionment* pomeni slabo porazdeljenost volilnih enot in okrajev, tako, da le-ti vsebujejo različno število prebivalcev. V manjši enoti je glas volilca vreden več.

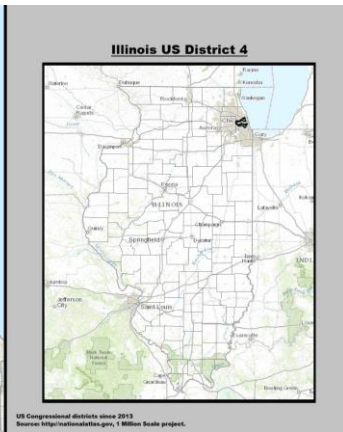
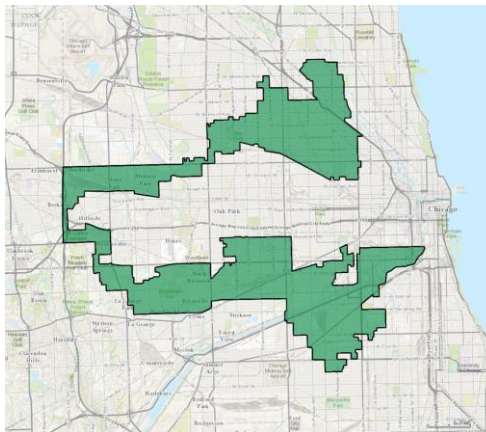
Primer: volilna enota 4-Lj. Bežigrad 225 000 volilcev, volilna enota 6-Novoto mesto 205 000 volilcev. Komentar: ni videti velike razlike med volilnimi enotami (ne zamešati z volilnim okrajem).

- *Gerrymandering* pomeni namerno prirojevanje oblike in/ali velikosti volilnih enot z namenom diskriminacije skupine volilcev.

Etimologija: Elbridge Gerry, republikanski guverner zvezne države Massachusetts, ki je leta 1812 spremenil meje volilnega okoliša v nenavadno, spačeno obliko + salamander (močerad).



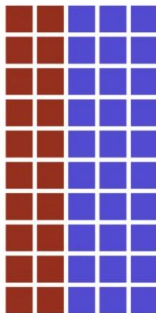
Še en primer: združevanje Portoričanov in Mehičanov v predmestjih Chicaga.



Veliko držav se lahko »pohvali« z gerrymanderingom.

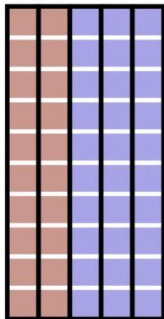
- Geometrija gerrymanderinga [5]:

50
people



**60% blue,
40% red**

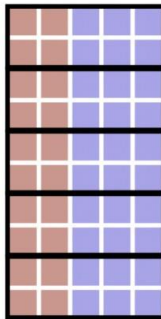
1. Perfect
representation



**3 blue districts,
2 red districts**

BLUE WINS

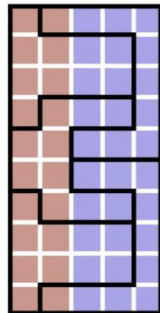
2. Compact,
but unfair



**5 blue districts,
0 red districts**

BLUE WINS

3. Neither compact
nor fair



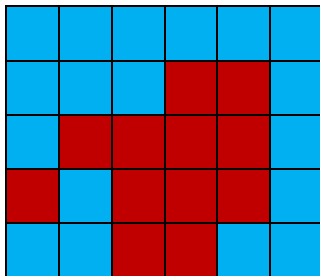
**2 blue districts,
3 red districts**

RED WINS

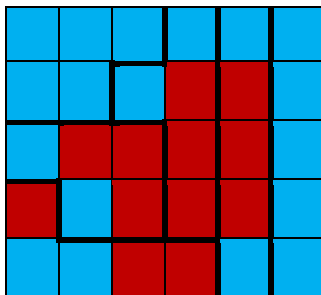
- Za vajo: stanje volilnega telesa v državi je:
rdeči : modri = 12 : 18.

Naloga: razdeli državo na 6 enako velikih volilnih enot tako, da bodo:

- a) rdeči imeli večino v večini enot!
- b) modri imeli večino v vseh enotah!



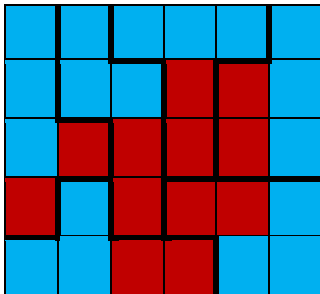
- (a) Razdelitev države na 6 volilnih enot tako, da bodo rdeči imeli večino v večini enot. Ena izmed več možnih razmejitev med volilnimi enotami je prikazana spodaj:



volilci: rdeči : modri = 12 : 18

volilne enote: rdeči : modri = 4 : 2

- (b) Razdelitev države na 6 volilnih enot tako, da bodo modri imeli večino v vseh enotah:



volilci: rdeči : modri = 12 : 18

volilne enote: rdeči : modri = 0: 6

- Gerrymandering je dokaj preprosto izvesti. Smotrno pa ga je izvesti (morala in etika?) v primerih, ko iz ene volilne enote izvolijo samo enega predstavnika, t.j. v večinskem volilnem sistemu.
- V proporcionalnem volilnem sistemu pa gerrymandering običajno nima smisla.

Pravične volitve?

“Democracies everywhere are suffering. Voters protest. Citizens don’t vote. Support for the political extremes are increasing. One of the underlying causes, we argue, is majority voting as it is now practiced, and its influence on the media.” [6]

Literatura

- [1] <http://jlmartin.faculty.ku.edu/~jlmartin/courses/math105-F11/> (dostopno novembra 2021).
- [2] <http://www.consilium.europa.eu/en/council-eu/voting-system/voting-calculator/> (dostopno novembra 2021).
- [3] <http://www.pisrs.si/Pis.web/> (dostopno novembra 2021).
- [4] <http://volitve.gov.si/dz2018/> (dostopno novembra 2021).
- [5] <https://www.washingtonpost.com/news/wonk/wp/2015/03/01/this-is-the-best-explanation-of-gerrymandering-you-will-ever-see/> (dostopno novembra 2021).

- [6] <https://theconversation.com/trump-and-clinton-victorious-proof-that-us-voting-system-doesnt-work-58752> (dostopno novembra 2021)