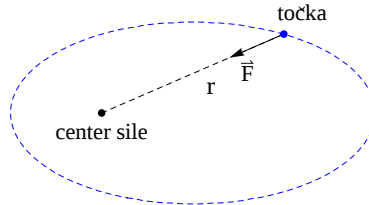


Mehanika 1

Gibanje v polju centralne sile

Gibanje točke v polju centralne sile je v osnovi sicer trodimenzionalno, z upoštevanjem ohranitvenih količin pa ga lahko reduciramo na dinamiko enega samega parametra.



Sila na točko je centralna, če:

- ves čas kaže proti centru sile,
- je njena velikost odvisna samo od razdalje točke od centra sile,
- je dana s potencialom.

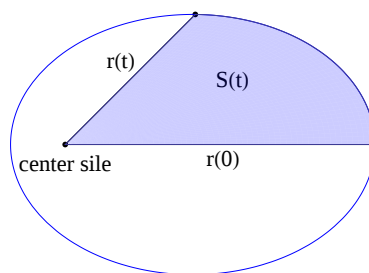
To pomeni, da jo lahko zapišemo v obliki

$$\vec{F} = F(r)\vec{e}_r,$$

kjer je r razdalja točke od centra sile, $F(r) = -V'(r)$ za nek potencial $V : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ in $\vec{e}_r$ enotski vektor ki kaže od centra sile do točke. Iz definicije centralne sile lahko izpeljemo, da se pri gibanju v polju centralne sile ohranjata:

- (1) skupna energija E točke,
- (2) vrtilna količina $\vec{l}$ točke glede na center sile.

Ohranitev teh dveh količin nam omogoča, da dinamiko točke v polju centralne sile reduciramo na dinamiko parametra r .



V tesni povezavi z vrtilno količino je ploščinska hitrost. Velja namreč

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt} = \frac{l}{2m},$$

kjer je l predznačena velikost vrtilne količine $\vec{l}$ in m masa točke. Ker je vrtilna količina točke konstantna, se pri gibanju v polju centralne sile ohranja tudi ploščinska hitrost točke, čemur bi lahko rekli posplošeni 2. Keplerjev zakon. Pri mehaniki namesto s ploščinsko hitrostjo raje operiramo z dvojno ploščinsko hitrostjo

$$C_0 = 2\frac{dS}{dt} = \frac{l}{m}.$$

- (1) Točka se premika po ravnini tako, da ima ves čas konstantno velikost hitrosti, smer hitrosti pa oklepa kot $\phi = \frac{3\pi}{4}$ z radialno smerjo.
- (a) Določi trajektorijo točke.
- (b) Izračunaj pospešek točke.

Rešitev: Koordinatni sistem na odprti podmnožici $U \subset \mathbb{R}^2$ je gladka injektivna preslikava:

$$\begin{aligned}\Phi : U &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ (x, y) &\mapsto (u(x, y), v(x, y)),\end{aligned}$$

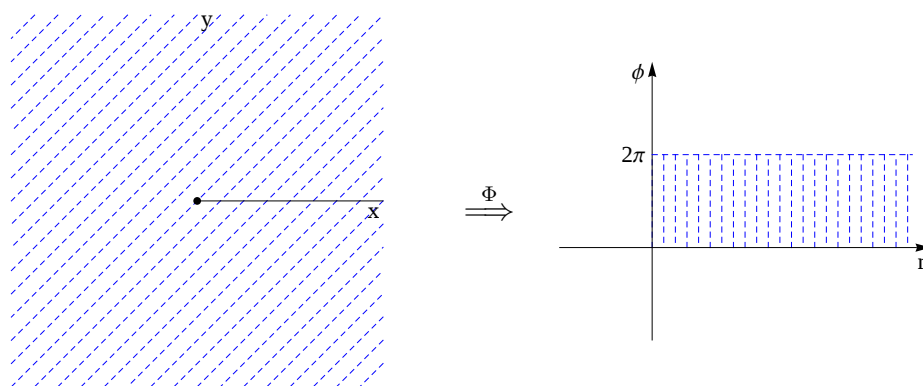
ki ima povsod neizrojeno Jacobijevo matriko.

V primeru polarnih koordinat ponavadi vzamemo:

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}, \\ \Phi(U) &= (0, \infty) \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2,\end{aligned}$$

preslikava Φ pa je definirana implicitno s predpisom:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \phi, \\ y &= r \sin \phi.\end{aligned}$$



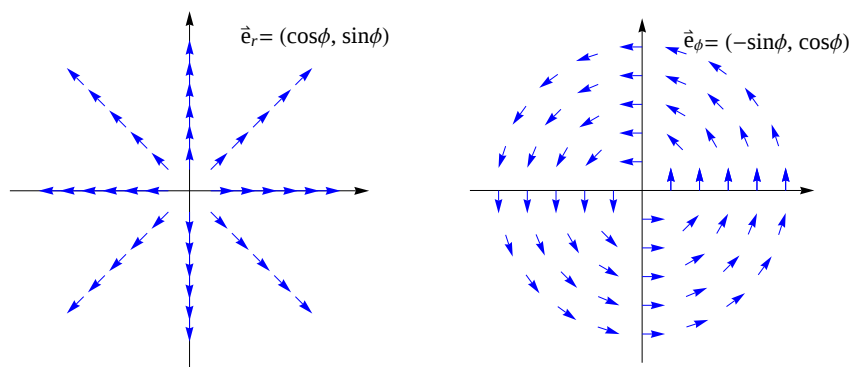
Če preslikamo koordinatni vektorski polji v (r, ϕ) -koordinatah z odvodom preslikave Φ^{-1} , dobimo na U vektorski polji:

$$\begin{aligned}\vec{g}_r &= \left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r} \right) = (\cos \phi, \sin \phi) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \\ \vec{g}_\phi &= \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}, \frac{\partial y}{\partial \phi} \right) = (-r \sin \phi, r \cos \phi) = (-y, x).\end{aligned}$$

Pri mehaniki raje uporabljamo prirejeni enotski vektorski polji:

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= (\cos \phi, \sin \phi), \\ \vec{e}_\phi &= (-\sin \phi, \cos \phi).\end{aligned}$$

Vektorsko polje $\vec{e}_r$ kaže v smeri naraščanja funkcije r , vektorsko polje $\vec{e}_\phi$ pa v smeri naraščanja funkcije ϕ .



Če imamo gibanje točke opisano v polarnih koordinatah, lahko njen položaj opišemo z vektorsko funkcijo

$$\vec{r}(t) = (r(t) \cos \phi(t), r(t) \sin \phi(t)).$$

Z odvajanjem dobimo, da je hitrost točke enaka

$$\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi, \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi.$$

Komponenti hitrosti imenujemo:

$$\begin{aligned} \cdot v_r &= \dot{r} && \text{radialna hitrost,} \\ \cdot v_\phi &= r \dot{\phi} && \text{obodna hitrost.} \end{aligned}$$

Če odvajamo hitrost, dobimo pospešek točke v polarnih koordinatah

$$\ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r} \dot{\phi} + r \ddot{\phi}) \vec{e}_\phi,$$

posamezni členi pospeška pa so:

$$\begin{aligned} \cdot a_r &= \ddot{r} - r \dot{\phi}^2 && \text{radialni pospešek,} \\ \cdot a_\phi &= 2\dot{r} \dot{\phi} + r \ddot{\phi} && \text{obodni pospešek.} \end{aligned}$$

(a) V našem primeru ima točka konstantno velikost hitrosti, smer hitrosti pa oklepa kot $\phi = \frac{3\pi}{4}$ z radialno smerjo. To pomeni, da je

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi = -\frac{\sqrt{2}}{2} v \vec{e}_r + \frac{\sqrt{2}}{2} v \vec{e}_\phi.$$

Od tod dobimo sistem dveh diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} v, \\ r \dot{\phi} &= \frac{\sqrt{2}}{2} v. \end{aligned}$$

Privzeli bomo, da je točka v začetnem trenutku na položaju $\vec{r}(0) = (r_0, 0)$, kar pomeni, da je $r(0) = r_0$ in $\phi(0) = 0$. Zgornjo enačbo lahko potem integriramo v

$$r(t) = r_0 - \frac{\sqrt{2}}{2} vt.$$

Ko to vstavimo v drugo enačbo, dobimo enačbo

$$\dot{\phi} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{r_0 - \frac{\sqrt{2}}{2} vt}.$$

Z integracijo in upoštevanjem začetne vrednosti dobimo rezultat

$$\phi(t) = \ln \left(\frac{r_0}{r_0 - \frac{\sqrt{2}}{2}vt} \right).$$

Predpisa:

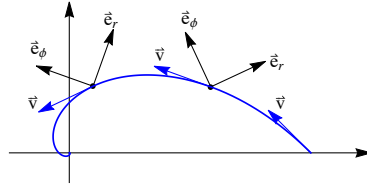
$$r(t) = r_0 - \frac{\sqrt{2}}{2}vt,$$

$$\phi(t) = \ln \left(\frac{r_0}{r_0 - \frac{\sqrt{2}}{2}vt} \right)$$

opisujeta trajektorijo gibanja točke po ravnini, ki zadošča danim pogojem. Če nas ne zanima, kako točno se točka premika, ampak samo, kakšno krivuljo opiše med gibanjem, govorimo o tirnici gibanja. V našem primeru lahko izrazimo

$$r(\phi) = r_0 e^{-\phi},$$

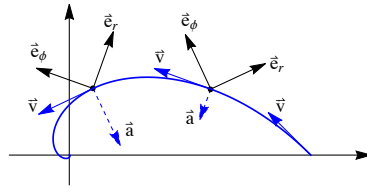
kar pomeni, da se točka premika po logaritmčni spirali.



(b) Pospešek točke je enak

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\vec{e}_\phi = -\frac{v^2}{2r}\vec{e}_r - \frac{v^2}{2r}\vec{e}_\phi.$$

Vidimo, da sta pospešek in hitrost točke ves čas pravokotna.



□

(2) Točka z maso m se giblje pod vplivom gravitacijske sile $\vec{F}(r) = -\frac{mMG}{r^2}\vec{e}_r$.

(a) Z uporabo Binetove formule določi tirnico točke.

(b) Določi efektivni potencial.

Rešitev: (a) Binetova formula

$$a_r = -C_0^2 u^2 (u'' + u)$$

povezuje obliko centralne sile in pa enačbo tira gibanja. Tir podamo v obliki $r = r(\phi)$, z u pa nato označimo obratno vrednost razdalje točke od centra sile oziroma $u(\phi) = \frac{1}{r(\phi)}$.

Če imamo dan tir točke, lahko z odvajanjem in pa z uporabo Binetove formule ponavadi brez večjih težav izračunamo, kakšna sila deluje nanjo. V kolikor pa imamo dano silo, pa moramo za izračun tira rešiti diferencialno enačbo drugega reda, kar pa je v splošnem dokaj težko.

V našem primeru je

$$a_r = -\frac{MG}{r^2} = -MGu^2.$$

Od tod z uporabo Binetove formule pridemo do diferencialne enačbe:

$$\begin{aligned} a_r &= -C_0^2 u^2 (u'' + u), \\ -MGu^2 &= -C_0^2 u^2 (u'' + u), \\ u'' + u &= \frac{MG}{C_0^2}. \end{aligned}$$

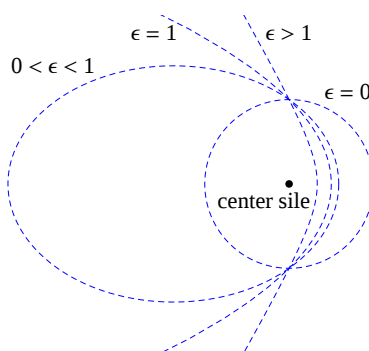
Splošno rešitev te diferencialne enačbe lahko zapišemo v obliki

$$u(\phi) = C_1 \cos \phi + C_2 \sin \phi + \frac{MG}{C_0^2} = A \cos(\phi - \phi_0) + \frac{MG}{C_0^2},$$

kjer je $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ in ϕ_0 polarni kot točke (C_1, C_2) . Tako smo prišli do tira oblike

$$r(\phi) = \frac{1}{A \cos(\phi - \phi_0) + \frac{MG}{C_0^2}} = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0)},$$

kjer je $p = \frac{C_0^2}{MG}$ in $\epsilon = \frac{AC_0^2}{MG}$. Ta predpis določa stožnico v ravnini, ki ima gorišče v koordinatnem izhodišču. Parameter ϵ je *numerična ekscentričnost* stožnice in natanko določa tip stožnice. Če je $\epsilon = 0$ tako dobimo krožnico, pri $0 < \epsilon < 1$ elipso, pri $\epsilon = 1$ parabolo, pri $\epsilon > 1$ pa hiperbolo. Parameter p imenujemo *polparameter*, parameter ϕ_0 pa določa orientacijo stožnice. Na spodnji sliki je narisana odvisnost tipa stožnice od parametra ϵ pri fiksnem p in pri $\phi_0 = 0$.



Vrednosti parametrov p , ϵ in ϕ_0 so odvisne od začetnega položaja in začetne hitrosti točke.

Če je sila privlačna in obratno sorazmerna s kvadratom oddaljenosti točke od centra sile, smo torej izpeljali, da morajo biti tirnice točk stožnice. V bistvu smo tako iz Newtonovega gravitacijskega zakona izpeljali 1. Keplerjev zakon. Dokaz implikacije v obratno smer je še nekoliko lažji, saj nam ni treba reševati diferencialne enačbe, ampak samo odvajati predpis tira in uporabiti Binetovo formulo.

Oblika tira točke (ne pa orientacija) je določena z energijo in pa vrtilno količino točke na naslednji način:

$$p = \frac{l^2}{m\gamma},$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{m\gamma^2}},$$

kjer je $\gamma = mMG$, G pa gravitacijska konstanta.

(b) Gravitacijski potencial je določen s predpisom $F(r) = -V'(r)$, od koder dobimo

$$V(r) = \int_r^\infty F(r) dr = -\gamma \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = -\frac{\gamma}{r}.$$

Potencial ponavadi izberemo tako, da v neskončnosti limitira proti nič.

Pri gibanju točke v polju centralne sile igra pomembno vlogo efektivni potencial

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}.$$

Z uvedbo efektivnega potenciala lahko dinamiko točke reduciramo na dinamiko parametra r , saj velja

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = E.$$

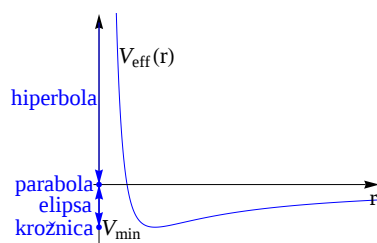
Če vemo, kakšen je efektivni potencial, lahko kvalitativno obravnavamo, kako se spreminja oddaljenost točke od centra sile, z integriranjem pa lahko tudi izračunamo $r = r(t)$. Spreminjanje polarnega kota lahko nato izračunamo s pomočjo Keplerjevega zakona

$$\dot{\phi} = \frac{C_0}{r^2}.$$

V primeru gravitacijske sile je efektivni potencial enak

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{\gamma}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}.$$

Minimalna možna energija točke je enaka $V_{\min} = -\frac{m\gamma^2}{2l^2}$. Pri tej energiji je tir točke krožnica. Za energije $V_{\min} < E < 0$ se točka giblje po elipsi, pri energiji $E = 0$ po paraboli, pri energijah $E > 0$ pa po hiperboli.



Opomba: Pri izračunih gibanja točke v polju centralne sile privzamemo, da je center sile mirujoč v koordinatnem izhodišču. Ta predpostavka je smiselna, če imamo telesi z masama m in $M \gg m$, pri telesih s primerljivimi masami pa moramo sistem obravnavati kot sistem dveh teles. $\square$

(3) Materialna točka z maso m se giblje pod vplivom gravitacijske sile $\vec{F}(r) = -\frac{mMG}{r^2}\vec{e}_r$. V začetnem trenutku je na položaju $\vec{r}(0) = (r_0, 0)$ in ima hitrost $\vec{v}(0) = (0, v)$.

(a) Določi tip orbite v odvisnosti od parametra v .

(b) Določi tir točke v primeru, ko je $v = \sqrt{\frac{MG}{2r_0}}$.

(c) Določi polosi eliptične orbite v primeru, ko je $v = \sqrt{\frac{MG}{2r_0}}$.

Rešitev: (a) Tip orbite točke, ki se premika pod vplivom gravitacijske sile, je odvisen od energije točke. Ker se energija ohranja, je dovolj, da izračunamo energijo točke v začetnem trenutku. V našem primeru tako dobimo

$$E = W_{\text{kin}} + W_{\text{pot}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mMG}{r_0}.$$

Glede na velikost v tako ločimo tri primere:

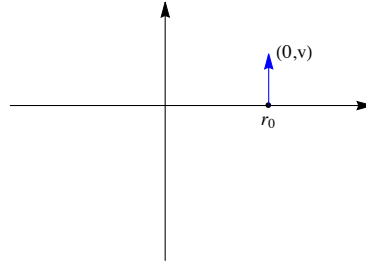
(1) $v < \sqrt{\frac{2MG}{r_0}}$...tir točke je elipsa,

(2) $v = \sqrt{\frac{2MG}{r_0}}$...tir točke je parabola,

(3) $v > \sqrt{\frac{2MG}{r_0}}$...tir točke je hiperbola.

Vrednosti $v = \sqrt{\frac{2MG}{r_0}}$ ponavadi rečemo *ubežna hitrost*. To je najmanjša hitrost točke, pri kateri je njen tir neomejen.

(b) V primeru, ko je $v = \sqrt{\frac{MG}{2r_0}}$, je tir točke elipsa. V nadaljevanju bomo izračunali obliko in orientacijo eliptične orbite pri začetnih pogojih $\vec{r}(0) = (r_0, 0)$ in $\vec{v}(0) = (0, v)$.



Najprej izračunajmo energijo in vrtilno količino točke. V začetnem trenutku je

$$E = \frac{1}{2}m|\vec{v}(0)|^2 - \frac{mMG}{r_0} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mMG}{r_0} = \frac{mMG}{4r_0} - \frac{mMG}{r_0} = -\frac{3mMG}{4r_0}$$

in

$$l = |\vec{l}| = |m\vec{r}(0) \times \vec{v}(0)| = mr_0v.$$

Od tod lahko sedaj izračunamo:

$$p = \frac{l^2}{m\gamma} = \frac{1}{2}r_0,$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2l^2E}{m\gamma^2}} = \frac{1}{2}.$$

Izračunati moramo še orientacijo elipse. Privzeli bomo, da je zavrnjena za kot ϕ_0 glede na abscisno os, kar pomeni, da je njena enačba

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0)}.$$

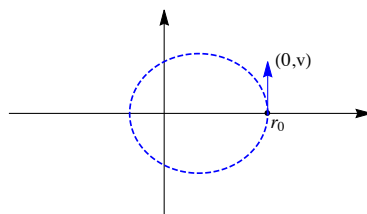
V začetnem trenutku je $r(\phi = 0) = r_0$. Ko to vstavimo v enačbo elipse, dobimo pogoj

$$r_0 = \frac{\frac{r_0}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cos(-\phi_0)}$$

iz katerega sledi $\cos \phi_0 = -1$ oziroma $\phi_0 = \pi$. Enačba elipse je torej

$$r(\phi) = \frac{\frac{r_0}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cos(\phi - \pi)} = \frac{r_0}{2 - \cos \phi}.$$

Poglejmo še skico.



(c) Elipso lahko podamo v kartezični obliki z enačbo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

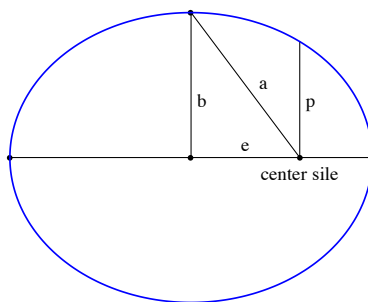
ali pa v polarni obliki z enačbo

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi}.$$

Opozoriti moramo, da je v kartezični obliki koordinatno izhodišče v središču elipse, v polarni obliki pa v njenem gorišču, kar pomeni, da je:

$$\begin{aligned} x &= e + r \cos \phi, \\ y &= r \sin \phi. \end{aligned}$$

V nadaljevanju bomo izpeljali zvezo med parametri a, b, p in ϵ .



Po definiciji je

$$\epsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Razdalji od gorišča do temen elipse na večji poloski sta enaki $\frac{p}{1+\epsilon}$ in $\frac{p}{1-\epsilon}$, kar nam da

$$2a = \frac{p}{1+\epsilon} + \frac{p}{1-\epsilon} = \frac{2p}{1-\epsilon^2}.$$

Od tod lahko izpeljemo zveze:

$$\begin{aligned} a &= \frac{p}{1-\epsilon^2}, \\ b &= \frac{p}{\sqrt{1-\epsilon^2}}, \\ p &= \frac{b^2}{a}. \end{aligned}$$

Če upoštevamo vrednosti $p = \frac{r_0}{2}$ in $\epsilon = \frac{1}{2}$, dobimo:

$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{3}r_0, \\ b &= \frac{\sqrt{3}}{3}r_0. \end{aligned}$$

□

- (4) Točka z maso m se giblje pod vplivom centralne sile po lemniskati

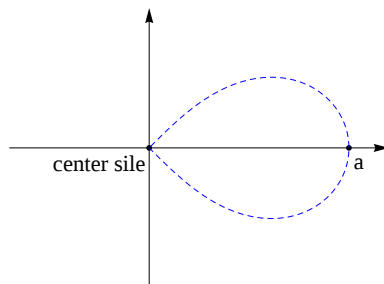
$$r(\phi) = a\sqrt{\cos 2\phi},$$

kjer je a pozitivna konstanta.

(a) Določi centralno silo.

(b) Določi čas prihoda v center sil, če je na začetku točka v apocentru in ima hitrost v .

Rešitev: (a) Najprej si pogledjmo skico lemniskate. V tem primeru tir točke seka center sile.



Za izračun centralne sile bomo spet uporabili Binetovo formulo. Iz $u(\phi) = \frac{1}{a\sqrt{\cos 2\phi}}$ dobimo

$$u'(\phi) = \frac{1}{a} \cdot \frac{-2 \sin 2\phi}{(\sqrt{\cos 2\phi})^3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{\sin 2\phi}{(\sqrt{\cos 2\phi})^3}$$

in

$$\begin{aligned} u''(\phi) &= \frac{1}{a} \cdot \frac{2 \cos 2\phi (\cos 2\phi)^{\frac{3}{2}} - \sin 2\phi \cdot \frac{3}{2} (\cos 2\phi)^{\frac{1}{2}} (-2 \sin 2\phi)}{\cos^3 2\phi}, \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{2(\cos 2\phi)^{\frac{5}{2}} + 3(\cos 2\phi)^{\frac{1}{2}} \sin^2 2\phi}{\cos^3 2\phi}. \end{aligned}$$

Pospešek točke v radialni smeri je tako enak:

$$\begin{aligned}
a_r &= -C_0^2 u^2 (u'' + u), \\
&= -\frac{C_0^2}{a^2 \cos 2\phi} \left(\frac{1}{a} \cdot \frac{2(\cos 2\phi)^{\frac{5}{2}} + 3(\cos 2\phi)^{\frac{1}{2}} \sin^2 2\phi}{\cos^3 2\phi} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos 2\phi}} \right), \\
&= -\frac{C_0^2}{a^3 \cos 2\phi} \left(\frac{2(\cos 2\phi)^{\frac{5}{2}} + 3(\cos 2\phi)^{\frac{1}{2}} (1 - \cos^2 2\phi) + (\cos 2\phi)^{\frac{5}{2}}}{\cos^3 2\phi} \right), \\
&= -\frac{C_0^2}{a^3 \cos 2\phi} \cdot \frac{3(\cos 2\phi)^{\frac{1}{2}}}{\cos^3 2\phi}, \\
&= -\frac{3C_0^2}{a^3 (\cos 2\phi)^{\frac{7}{2}}}, \\
&= -\frac{3C_0^2 a^4}{r^7},
\end{aligned}$$

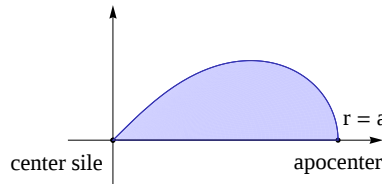
centralna sila pa

$$F(r) = -\frac{3mC_0^2 a^4}{r^7}.$$

(b) Za določanje časa, ki ga točka porabi za pot med dvema točkama na svojem tiru, lahko uporabimo Keplerjev zakon. Če označimo z S ploščino lika, ki ga točka opiše na poti med danima točkama, je čas, ki ga porabi za to pot, enak

$$T = \frac{2S}{C_0}.$$

Če hočemo torej izračunati čas, ki ga točka porabi, da pride iz apocentra v center sile, moramo izračunati ploščino lika, ki ga opiše med potjo.



Polovična ploščina lemniskate je enaka

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\phi d\phi = \frac{a^2}{4} \sin 2\phi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}.$$

Preostane nam še, da izrazimo C_0 z začetnim položajem in z začetno hitrostjo točke. V splošnem lahko hitrost točke zapišemo v obliki

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi.$$

V apocentru je točka na maksimalni oddaljenosti od centra sile, zato je tam $\dot{r} = 0$, kar pomeni, da je

$$v = r\dot{\phi}.$$

Če upoštevamo še Keplerjev zakon $r^2\dot{\phi} = C_0$, dobimo iz dejstva, da je v apocentru $r = a$, zvezo

$$C_0 = va.$$

Čas, ki ga točka porabi, da pride iz apocentra v center sile, je tako enak

$$T = \frac{a}{2v}.$$

Opomba 1:

Če bi hoteli izračunati trajektorijo točke, bi morali integrirati diferencialno enačbo

$$\dot{\phi} = \frac{C_0}{r^2} = \frac{C_0}{a^2 \cos 2\phi},$$

pri začetnem pogoju $\phi(0) = 0$. To je diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama, ki ima rešitev

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{2C_0}{a^2} t \right).$$

Z upoštevanjem oblike tira od tod dobimo še

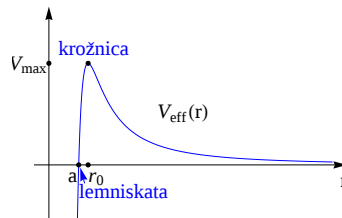
$$r(t) = a \sqrt[4]{1 - \frac{4C_0^2}{a^4} t^2}.$$

Opomba 2:

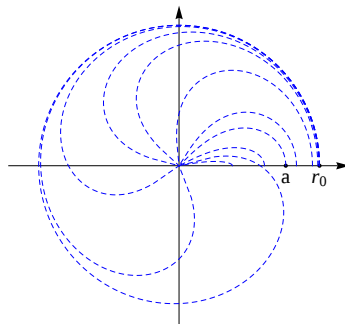
Efektivni potencial točke pri gibanju v polju centralne sile $F(r) = -\frac{3mC_0^2 a^4}{r^7}$ je enak

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{mC_0^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{a^4}{r^6} \right).$$

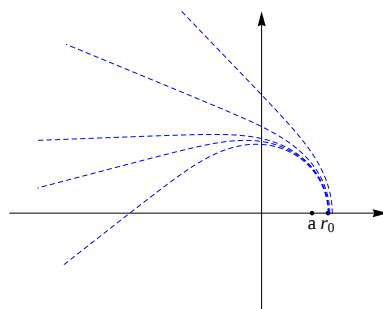
Če se točka giblje pod vplivom sile F , dobimo pri različnih energijah različne oblike tira. Obravnavali bomo primere, ko je $\dot{r}(0) = 0$ in $\phi(0) = 0$. To pomeni, da točka začne gibanje v apocentru ali pa v pericentru. Gibanju po lemniskati ustreza primer, ko je skupna energija točke enaka $E = 0$, oziroma, ko je apsidna razdalja enaka $r = a$.



Pri ostalih energijah dobimo tire, ki jih je v splošnem težko analitično izračunati. Tiri so omejeni v primerih, ko je apsidna razdalja točke manjša od $r_0 = \sqrt[4]{3}a$. Ko se apsidna razdalja tira približuje r_0 , se oblika tira približuje krožnici, pri apsidni razdalji r_0 pa je tir točke krožnica.



Točkam, ki ležijo desno od r_0 na grafu efektivnega potenciala, ustrezajo neomejeni tiri.



□

- (5) Točka z maso m se giblje z dano dvojno ploščinsko hitrostjo C_0 pod vplivom centralne sile

$$\vec{F}(r) = -\frac{C_0^2(1+a^2)m}{r^3}\vec{e}_r,$$

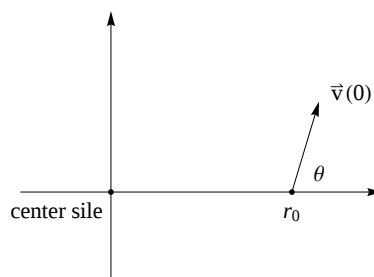
kjer je a pozitivna konstanta. V začetnem trenutku je na oddaljenosti r_0 od centra sil pod kotom $\phi = 0$ in ima radialno hitrost enako $v_r = \frac{aC_0}{r_0}$. Izračunaj tirnico in trajektorijo točke.

Rešitev: Začetni položaj in začetna hitrost točke sta:

$$\begin{aligned}\vec{r}(0) &= (r_0, 0), \\ \vec{v}(0) &= \left(\frac{aC_0}{r_0}, \frac{C_0}{r_0}\right).\end{aligned}$$

Obodno komponento hitrosti smo dobili z upoštevanjem Keplerjevega zakona. Od tod vidimo, da parameter a določa kot med začetno hitrostjo in pa abscisno osjo, saj je

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{a}.$$



Tir gibanja:

Radialni pospešek točke je enak

$$a_r = -\frac{C_0^2(1+a^2)}{r^3} = -C_0^2(1+a^2)u^3.$$

Od tod z uporabo Binetove formule pridemo do diferencialne enačbe:

$$\begin{aligned}a_r &= -C_0^2 u^2(u'' + u), \\ -C_0^2(1+a^2)u^3 &= -C_0^2 u^2(u'' + u), \\ (1+a^2)u &= u'' + u, \\ u'' - a^2 u &= 0.\end{aligned}$$

Splošno rešitev te diferencialne enačbe lahko zapišemo v obliki

$$u(\phi) = Ae^{a\phi} + Be^{-a\phi}.$$

Za določitev konstant A in B potrebujemo še začetna pogoja $u(0)$ in $u'(0)$. Direktno iz predpostavk naloge sledi, da je

$$u(0) = \frac{1}{r(0)} = \frac{1}{r_0}.$$

Funkcija $u'(\phi)$ je v povezavi z obliko tira, ni pa v direktni povezavi s hitrostjo točke. Lahko pa jo izrazimo tudi na naslednji način

$$u'(\phi) = \frac{du}{d\phi} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{d\phi} = \frac{\dot{u}}{\dot{\phi}} = \frac{-\frac{\dot{r}}{r^2}}{\frac{C_0}{r^2}} = -\frac{\dot{r}}{C_0}.$$

Začetna hitrost točke v radialni smeri je enaka $\dot{r}(0) = v_r(0) = \frac{aC_0}{r_0}$, od koder dobimo

$$u'(0) = -\frac{a}{r_0}.$$

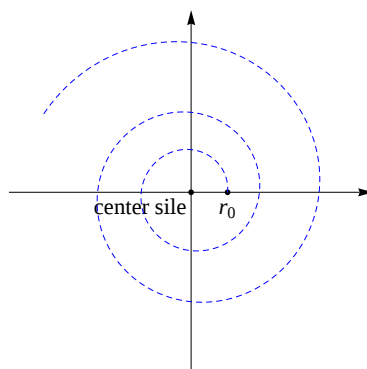
Z upoštevanjem začetnih pogojev dobimo sistem enačb, ki mu zadoščata A in B :

$$\begin{aligned}u(0) &= A + B = \frac{1}{r_0}, \\ u'(0) &= aA - aB = -\frac{a}{r_0}.\end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je $A = 0$, $B = \frac{1}{r_0}$. Sledi

$$r(\phi) = r_0 e^{a\phi}.$$

Tir materialne točke je torej logaritmična spirala.



Trajektorija gibanja:

Pri določanju trajektorije gibanja nas ne zanima samo kakšno krivuljo opiše točka med gibanjem, ampak tudi kako se (v odvisnosti od časa) giblje po njej. Če poznamo tir točke, lahko njeno trajektorijo dobimo z upoštevanjem Keplerjevega zakona

$$r^2 \dot{\phi} = C_0.$$

V primeru, ko je $r(\phi) = r_0 e^{a\phi}$, pridemo do diferencialne enačbe z ločljivimi spremenljivkami

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \frac{C_0}{r_0^2 e^{2a\phi}}, \\ e^{2a\phi} d\phi &= \frac{C_0}{r_0^2} dt, \\ \frac{1}{2a} e^{2a\phi} &= \frac{C_0}{r_0^2} t + A.\end{aligned}$$

Ker je $\phi(0) = 0$, je $A = \frac{1}{2a}$, trajektorija točke pa je podana s predpisom

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{2aC_0}{r_0^2} t + 1 \right), \\ r(t) &= r_0 \sqrt{\frac{2aC_0}{r_0^2} t + 1}.\end{aligned}$$

□