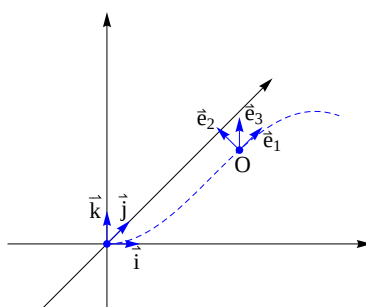


Mehanika 1

Gibanje v relativnem koordinatnem sistemu

Drugi Newtonov zakon lahko uporabimo samo za opis dinamike gibanja točke v nekem inercialnem koordinatnem sistemu. Včasih pa lahko gibanje točke precej bolj preprosto opišemo v koordinatnem sistemu, ki ni inercialen. V tem poglavju bomo spoznali, kakšno obliko imajo gibalne enačbe v takšnih koordinatnih sistemih.

Praviloma bomo imeli opravka z dvema koordinatnima sistemoma. Absolutni koordinatni sistem AKS bo ponavadi inercialen, relativni koordinatni sistem RKS pa bomo izbrali tako, da bomo čimbolj poenostavili opis gibanja točke.



Položaj RKS glede na AKS je določen z naslednjima podatkom:

- položajem O izhodišča RKS glede na AKS,
- orientacijo RKS glede na AKS.

Bazo absolutnega koordinatnega sistema označimo z vektorji $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, bazo relativnega koordinatnega sistema pa z vektorji $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Glede na to, da imamo ves čas opravka z dvema bazama hkrati, zaradi enostavnosti uporabljamo naslednji dogovor. Če je $\vec{u}$ poljuben vektor, uporabljamo oznako:

- $\vec{u}$, kadar pišemo koordinate vektorja $\vec{u}$ glede na bazo RKS,
- $\vec{u}'$, kadar pišemo koordinate vektorja $\vec{u}$ glede na bazo AKS.

Bolj podrobno bomo kinematiko vrtenja spoznali v naslednjih poglavjih, zaenkrat pa se bomo omejili na primer, ko se RKS vrti glede na AKS okoli fiksne osi. Večinoma bomo imeli opravka z naslednjimi primeri relativnega gibanja RKS glede na AKS:

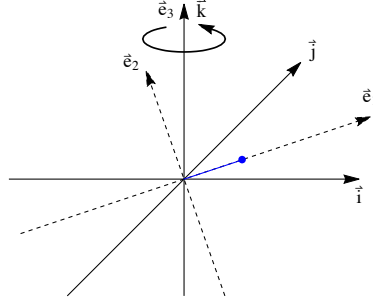
- orientaciji obeh sistemov sovpadata, izhodišče RKS pa se giblje glede na AKS,
- izhodišči obeh sistemov sovpadata, RKS pa se vrti glede na AKS okrog fiksne osi,
- kombinacija zgornjih dveh primerov.

Vrtenje okoli fiksne osi $\vec{e}$ je določeno s funkcijo $t \rightarrow \phi(t)$. V tem primeru je

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \dot{\phi} \vec{e}, \\ \dot{\vec{\omega}} &= \ddot{\phi} \vec{e}.\end{aligned}$$

- (1) Točka se premika s predpisom $\vec{r}_{\text{rel}}(t) = (vt, 0, 0)$ v sistemu, ki se enakomerno s kotno hitrostjo ω v navpični smeri vrti okoli izhodišča. Opiši trajektorijo točke v mirujočem sistemu.

Rešitev: Opazujemo gibanje točke, ki se premika enakomerno v vrtečem se sistemu, ki ga bomo označili z RKS. Zanima pa nas, kako lahko opišemo gibanje točke v mirujočem sistemu AKS.



Položaj, hitrost in pospešek točke v AKS bomo označili z $\vec{r}$, $\vec{v}$ in $\vec{a}$, v RKS pa z $\vec{r}_{\text{rel}}$, $\vec{v}_{\text{rel}}$ in $\vec{a}_{\text{rel}}$. Z $\vec{r}_0$ pa bomo označili položaj izhodišča RKS, gledano v AKS.

V AKS lahko bazo RKS izrazimo v naslednji obliki:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1' &= (\cos \omega t, \sin \omega t, 0), \\ \vec{e}_2' &= (-\sin \omega t, \cos \omega t, 0), \\ \vec{e}_3' &= (0, 0, 1).\end{aligned}$$

To pomeni, da je položaj RKS glede na AKS določen z naslednjimi podatki:

- (1) $\vec{r}_0'(t) = 0$, ker imata oba koordinatna sistema isto izhodišče.
- (2) $Q(t) = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{\omega}'(t) = (0, 0, \omega)$, $\vec{\omega}(t) = (0, 0, \omega)$, $\omega = \text{const.}$

Zveza med koordinatami točke v AKS in RKS:

Med koordinatami poljubne točke v obeh koordinatnih sistemih velja zveza

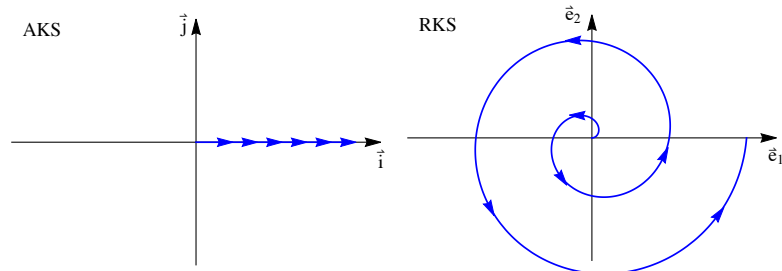
$$\vec{r}' = \vec{r}_0' + Q\vec{r}_{\text{rel}}.$$

Ker je $\vec{r}_0'(t) = 0$ in $\vec{r}_{\text{rel}}(t) = (vt, 0, 0)$, je

$$\vec{r}'(t) = Q(t)\vec{r}_{\text{rel}}(t) = (vt \cos \omega t, vt \sin \omega t, 0).$$

Od tod sledi, da se v mirujočem sistemu točka premika po spirali, ki jo lahko opišemo v polarnih koordinatah s predpisom

$$r'(\phi) = \frac{v}{\omega} \phi.$$



Zveza med hitrostima točke v AKS in RKS:

V našem primeru je $\vec{v}_{\text{rel}}(t) = (v, 0, 0) = v\vec{e}_1$ in

$$\vec{v}'(t) = (v \cos \omega t - \omega v t \sin \omega t, v \sin \omega t + \omega v t \cos \omega t, 0) = v\vec{e}_1' + \omega v t \vec{e}_2' = \vec{v}'_{\text{rel}} + \vec{\omega}' \times \vec{r}'_{\text{rel}}.$$

V splošnem pa med hitrostima v obeh koordinatnih sistemih velja zveza

$$\vec{v}' = \vec{v}'_{\text{rel}} + \vec{v}'_0 + \vec{\omega}' \times \vec{r}'_{\text{rel}},$$

oziroma

$$\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v} - \vec{v}'_0 - \vec{\omega} \times \vec{r}_{\text{rel}}.$$

Vidimo, da k hitrosti točke v AKS poleg hitrosti v RKS ter hitrosti izhodišča RKS prispeva še rotacijska hitrost $\vec{\omega}' \times \vec{r}'_{\text{rel}}$, ki je posledica vrtenja RKS glede na AKS.

Zveza med pospeškoma točke v AKS in RKS:

Sedaj bomo izračunali še pospeška točke, kot ju vidimo gledano v RKS in AKS. V RKS je pospešek točke enak $\vec{a}_{\text{rel}}(t) = (0, 0, 0)$, v AKS pa

$$\vec{a}'(t) = 2\omega v(-\sin \omega t, \cos \omega t, 0) - \omega^2 v t(\cos \omega t, \sin \omega t, 0) = 2\vec{\omega}' \times \vec{v}'_{\text{rel}} + \vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}'_{\text{rel}}).$$

V splošnem pa med pospeškoma v obeh koordinatnih sistemih velja zveza

$$\vec{a}' = \vec{a}'_{\text{rel}} + \vec{a}'_0 + 2\vec{\omega}' \times \vec{v}'_{\text{rel}} + \vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}'_{\text{rel}}) + \dot{\vec{\omega}}' \times \vec{r}'_{\text{rel}},$$

oziroma

$$\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{a} - \vec{a}_0 - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\text{rel}}) - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{\text{rel}}.$$

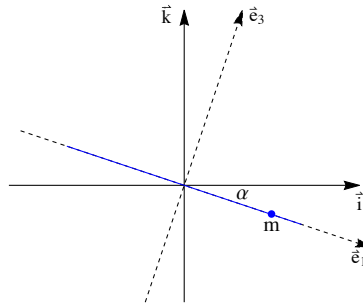
Tokrat se pojavijo naslednji novi členi:

- $2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}}$ Coriolisov pospešek,
- $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\text{rel}})$ centrifugalni pospešek,
- $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{\text{rel}}$ Eulerjev oziroma inercialni pospešek.

□

- (2) Cev, ki je nagnjena za kot α glede na vodoravnico, se giblje tako, da njeno izhodišče opiše trajektorijo $\vec{r}'_0(t) = (\frac{1}{2}at^2, 0, 0)$. Po cevi se brez trenja pod vplivom sile teže giblje točka z maso m . Določi gibanje točke, če le-ta na začetku miruje v izhodišču cevi.

Rešitev: Sedaj se RKS giblje glede na AKS enakomerno pospešeno v vodoravni smeri s pospeškom a . Orientaciji obeh koordinatnih sistemov sta ves čas enaki, privzeli pa bomo, da je RKS zavrt za kot α glede na AKS.



Položaj RKS glede na AKS je torej določen z naslednjimi podatki:

$$(1) \vec{r}'_0(t) = (\frac{1}{2}at^2, 0, 0).$$

$$(2) Q(t) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}, \vec{\omega}'(t) = 0, \vec{\omega}(t) = 0.$$

V relativnem koordinatnem sistemu lahko Newtonov zakon zapišemo v obliki

$$m\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{F} - \vec{F}_{\text{sist}} = \vec{F} - m\vec{a}_0 - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}.$$

Pri tem je $\vec{F}$ vsota zunanjih sil na točko, ostali členi na desni pa so posledica neinercialnosti relativnega koordinatnega sistema. Imenujemo jih po vrsti:

- $-m\vec{a}_0$ translacijska sila,
- $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}}$ Coriolisova sila,
- $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ centrifugalna sila,
- $-m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ inercialna sila rotacije.

V našem primeru je $\vec{\omega} = 0$, zato se Newtonov zakon v relativnem koordinatnem sistemu poenostavi v

$$m\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{F} - m\vec{a}_0.$$

Položaj točke v RKS lahko opišemo v obliki

$$\vec{r}_{\text{rel}}(t) = r(t)\vec{e}_1,$$

kjer je $r(t)$ oddaljenost točke od izhodišča RKS. Od tod lahko izračunamo tudi hitrost in pospešek točke v RKS:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\text{rel}} &= \dot{r}\vec{e}_1, \\ \vec{a}_{\text{rel}} &= \ddot{r}\vec{e}_1. \end{aligned}$$

Preostane nam še, da zapišemo zunanje sile in pa sistemske pospeške v bazi RKS. Sistemski pospešek je enak

$$\vec{a}_0 = a\vec{i} = a \cos \alpha \vec{e}_1 + a \sin \alpha \vec{e}_3,$$

sile na točko pa so:

$$\begin{aligned} \vec{F}_g &= -mg\vec{k} = mg \sin \alpha \vec{e}_1 - mg \cos \alpha \vec{e}_3, \\ \vec{F}_{\text{cevi}} &= F_2\vec{e}_2 + F_3\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali, da se točka giblje po cevi brez trenja, zato cev deluje na točko samo v smeri normale na cev.

Newtonov zakon lahko sedaj zapišemo v vektorski obliki

$$m\ddot{r}\vec{e}_1 = F_2\vec{e}_2 + F_3\vec{e}_3 + mg \sin \alpha \vec{e}_1 - mg \cos \alpha \vec{e}_3 - ma \cos \alpha \vec{e}_1 - ma \sin \alpha \vec{e}_3,$$

ali pa po komponentah:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 : \quad m\ddot{r} &= mg \sin \alpha - ma \cos \alpha, \\ \vec{e}_2 : \quad 0 &= F_2, \\ \vec{e}_3 : \quad 0 &= F_3 - mg \cos \alpha - ma \sin \alpha. \end{aligned}$$

Neznanke so obe komponenti sile premice in pa trajektorija točke $r = r(t)$. Enačba v smeri cevi določa gibanje točke, iz obeh enačb v normalnih smereh pa lahko izračunamo silo cevi na točko.

Enačbo gibanja točke lahko prepišemo v obliko

$$\ddot{r} = mg \sin \alpha - ma \cos \alpha.$$

Z upoštevanjem začetnih pogojev $r(0) = 0$ in $\dot{r}(0) = 0$ dobimo relativno gibanje točke glede na cev

$$r(t) = \frac{1}{2}(g \sin \alpha - a \cos \alpha)t^2.$$

Glede na velikost pospeška a in kota α ločimo tri možnosti:

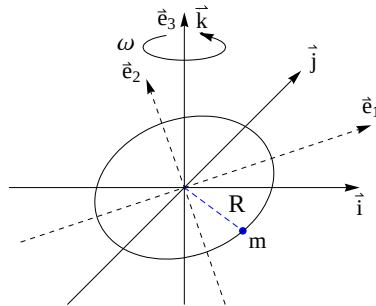
- (1) $g \sin \alpha = a \cos \alpha$ točka miruje relativno glede na cev,
- (2) $g \sin \alpha > a \cos \alpha$ točka pospešeno pada po cevi navzdol,
- (3) $g \sin \alpha < a \cos \alpha$ točka se premika pospešeno po cevi navzgor.

□

- (3) Krožnica s polmerom R se z enakomerno kotno hitrostjo ω vrti okoli premera v smeri navpične osi. Po njej se brez trenja in pod vplivom sile teže giblje točka z maso m .

- (a) Reduciraj gibanje na premočrtno gibanje parametra ϕ .
- (b) Poišči ravnovesne lege in jih klasificiraj.

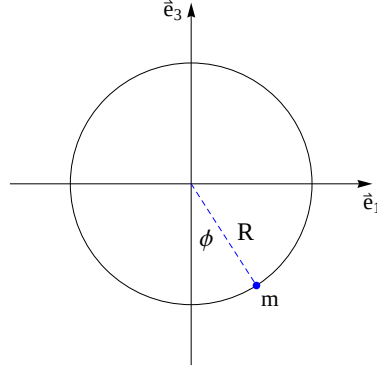
Rešitev: (a) Bazo relativnega koordinatnega sistema izberimo tako, da bo vektor $\vec{e}_1$ ležal v ravnini krožnice, vektor $\vec{e}_3$ pa bo kazal v smeri osi vrtenja.



V AKS se baza RKS spet izrazi v obliki:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1' &= (\cos \omega t, \sin \omega t, 0), \\ \vec{e}_2' &= (-\sin \omega t, \cos \omega t, 0), \\ \vec{e}_3' &= (0, 0, 1).\end{aligned}$$

Če opazujemo gibanje točke v relativnem koordinatnem sistemu, se točka giblje po krožnici s polmerom R , zato lahko njen položaj opišemo z enim parametrom. Izbrali si bomo kot med navpičnico in pa radij vektorjem točke.



Pri zapisu gibalnih enačb bomo kombinirali Newtonove enačbe v RKS z enačbami gibanja točke po krivulji. Položaj in hitrost točke v RKS sta:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= R(\sin \phi, 0, -\cos \phi), \\ \dot{\vec{r}}(t) &= R\dot{\phi}(\cos \phi, 0, \sin \phi).\end{aligned}$$

Od tod dobimo:

$$\begin{aligned}\dot{s} &= R\dot{\phi}, \\ \vec{e}_t &= (\cos \phi, 0, \sin \phi), \\ \vec{e}_n &= (-\sin \phi, 0, \cos \phi).\end{aligned}$$

Na točko delujeta sila teže in pa sila obroča:

$$\begin{aligned}\vec{F}_g &= (0, 0, -mg) = -mg \sin \phi \vec{e}_t - mg \cos \phi \vec{e}_n, \\ \vec{F}_{\text{obroča}} &= F_b \vec{e}_b + F_n \vec{e}_n.\end{aligned}$$

Privzeli smo, da med točko in obročem ni trenja, zato sila obroča nima komponente v tangentni smeri. Če upoštevamo, da je $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_3$, $\dot{\vec{\omega}} = 0$ in $\vec{a}_0 = 0$, se Newtonov zakon v RKS poenostavi v

$$m\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{F}_g + \vec{F}_{\text{obroča}} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Relativni pospešek lahko zapišemo v obliki

$$\vec{a}_{\text{rel}} = \ddot{s}\vec{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{e}_n,$$

izračunati pa moramo še Coriolisov ter centrifugalni pospešek. Po kratkem računu dobimo:

$$\begin{aligned}\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= -\omega^2 R \sin \phi \vec{e}_1, \\ 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} &= 2\omega R \dot{\phi} \cos \phi \vec{e}_2.\end{aligned}$$

Tako pridemo do vektorske oblike gibalnih enačb

$$m\ddot{s}\vec{e}_t + m\frac{\dot{s}^2}{R}\vec{e}_n = -mg \sin \phi \vec{e}_t - mg \cos \phi \vec{e}_n + F_b \vec{e}_b + F_n \vec{e}_n + m\omega^2 R \sin \phi \vec{e}_1 - 2m\omega R \dot{\phi} \cos \phi \vec{e}_2.$$

Gibanje točke določa komponenta te enačbe v tangentni smeri na krožnico. Dobimo jo tako, da vektorsko enačbo skalarno pomnožimo z $\vec{e}_t$. Tako pridemo do enačbe

$$m\ddot{s} = mR\ddot{\phi} = -mg \sin \phi + m\omega^2 R \sin \phi \cos \phi.$$

To je diferencialna enačba drugega reda za funkcijo $\phi = \phi(t)$. Če obe strani enačbe pomnožimo s $\dot{\phi}$, jo lahko integriramo do zakona o ohranitvi energije:

$$\begin{aligned} mR\ddot{\phi}\dot{\phi} &= -mg \sin \phi \dot{\phi} + m\omega^2 R \sin \phi \cos \phi \dot{\phi}, \\ \frac{1}{2}mR\dot{\phi}^2 &= mg \cos \phi + \frac{1}{2}m\omega^2 R \sin^2 \phi + C. \end{aligned}$$

Če zadnjo enačbo pomnožimo z R in jo malce preuredimo, pridemo do enačbe

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2 - mgR \cos \phi - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2 \phi = E.$$

Posamezni členi na levi strane enačbe imajo naslednjo fizikalno interpretacijo:

- $\frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2$ kinetična energija,
- $-mgR \cos \phi$ potencialna energija sile teže,
- $-\frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2 \phi$ centrifugalna energija.

Zapišimo sedaj

$$V(\phi) = -mgR \cos \phi - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2 \phi.$$

V RKS je potem gibanje točke po obroču določeno z enačbo

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2 + V(\phi) = E,$$

kar pomeni, da smo gibanje točke reducirali na premočrtno gibanje parametra ϕ .

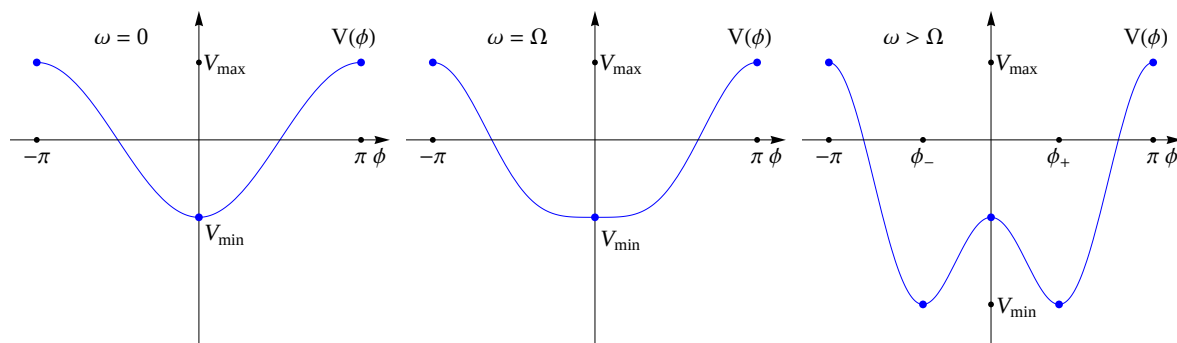
(b) Ravnovesne lege bomo našli s kvalitativno obravnavo potenciala $V = V(\phi)$. Odvod potenciala V je enak

$$V'(\phi) = mR^2 \sin \phi \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos \phi \right).$$

Uvedimo oznako $\Omega^2 = \frac{g}{R}$. Glede na relativno velikost ω in Ω ločimo dva primera.

- Če je $\omega \leq \Omega$, je $\phi = 0$ stabilna, $\phi = \pi$ pa nestabilna ravnovesna lega.
- Če je $\omega > \Omega$, sta $\phi \in \{0, \pi\}$ nestabilni, $\phi = \pm \arccos \frac{\Omega^2}{\omega^2}$ pa stabilni ravnovesni legi.

Če se obroč ne vrtil, imamo opravka z matematičnim nihalom, ki ima stabilno ravnovesno lego na dnu obroča. Ko se ω približuje Ω , postaja potencial v okolici te ravnovesne lege vse bolj položen. V mejnem primeru $\omega = \Omega$ je sicer na dnu obroča še vedno stabilna ravnovesna lega, ki pa postane nestabilna, brž ko se hitrost vrtenja še malo poveča.



□