

Mehanika 1

Kinematika togega telesa

Splošno gibanje togega telesa ponavadi razstavimo na dva dela:

- gibanje masnega središča,
- vrtenje telesa okrog masnega središča.

Gibanje masnega središča je določeno z Newtonovim zakonom, v tem in v naslednjem poglavju pa bomo spoznali, kako se opiše vrtenje telesa in kakšne so enačbe, ki določajo vrtenje telesa.

Videli bomo, da so količine in enačbe precej podobne tistim, ki določajo gibanje točke po prostoru, bodo pa rahlo bolj komplicirane. Matematični razlog tiči v tem, da je prostor možnih položajev točke vektorski prostor $\mathbb{R}^3$, prostor orientacij togega telesa pa Liejeva grupa $SO(3)$. Na prehodu iz $\mathbb{R}^3$ v $SO(3)$ izgubimo linearno strukturo, pa še grupna operacija postane nekomutativna. Na fizikalnem nivoju pa stvari zakomplicira dejstvo, da je vztrajnostni tenzor togega telesa simetrična 3×3 matrika. Ustrezen analog pri gibanju točke je masa, ki pa je skalar, zato so Newtonove enačbe v splošnem bolj enostavne kot Eulerjeve enačbe. V primeru, ko je vztrajnostni tenzor togega telesa skalarna matrika (kot npr. pri homogeni krogli), pa so Eulerjeve enačbe za vrtenje povsem analogne Newtonovim gibalnim enačbam. Malce težje je v tem primeru le integrirati kotno hitrost do orientacije telesa.

- (1) Opiši osno-kotno, kvaternionsko in parametrizacijo Liejeve grupe $SO(3)$ z Eulerjevimi koti.

Rešitev: Grupa rotacij

$$SO(3) = \{Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid Q^T Q = I, \det(Q) = 1\}$$

prostora $\mathbb{R}^3$ je tridimenzionalna Liejeva grupa, ki je kot topološki prostor difeomorfna projektivnemu prostoru $\mathbb{R}P^3$. Najprej pokažimo, da je $SO(3)$ gladka podmnogoterost $\mathbb{R}^{3 \times 3}$. Ker je $SO(3)$ ena izmed dveh povezanih komponent ortogonalne grupe

$$O(3) = \{Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid Q^T Q = I\},$$

je dovolj pokazati, da je $O(3)$ gladka podmnogoterost $\mathbb{R}^{3 \times 3}$.

V ta namen bomo poljubno matriko $Q \in O(3)$ zapisali v obliki

$$Q = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}.$$

Pogoj $Q^T Q = I$ nam pove, da so stolpci matrike Q paroma pravokotni enotski vektorji. To lahko zapišemo z naslednjim sistemom vezi:

$$\begin{aligned} x_{11}^2 + x_{21}^2 + x_{31}^2 &= 1, \\ x_{12}^2 + x_{22}^2 + x_{32}^2 &= 1, \\ x_{13}^2 + x_{23}^2 + x_{33}^2 &= 1, \\ x_{11}x_{12} + x_{21}x_{22} + x_{31}x_{32} &= 0, \\ x_{11}x_{13} + x_{21}x_{23} + x_{31}x_{33} &= 0, \\ x_{12}x_{13} + x_{22}x_{23} + x_{32}x_{33} &= 0. \end{aligned}$$

Označimo zaporedoma z $f_1, f_2, \dots, f_6$ zgornje vezi. Če nam uspe pokazati, da so gradienti teh vezi linearno neodvisni vzdolž podmnožice $O(3) \subset \mathbb{R}^{3 \times 3}$, bo od tod sledilo, da je $O(3)$ gladka podmnogoterost $\mathbb{R}^{3 \times 3}$. Gradienti teh vezi so:

$$\begin{aligned} \nabla f_1 &= 2 \begin{bmatrix} x_{11} & 0 & 0 \\ x_{21} & 0 & 0 \\ x_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla f_2 = 2 \begin{bmatrix} 0 & x_{12} & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla f_3 = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_{13} \\ 0 & 0 & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{33} \end{bmatrix}, \\ \nabla f_4 &= \begin{bmatrix} x_{12} & x_{11} & 0 \\ x_{22} & x_{21} & 0 \\ x_{32} & x_{31} & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla f_5 = \begin{bmatrix} x_{13} & 0 & x_{11} \\ x_{23} & 0 & x_{21} \\ x_{33} & 0 & x_{31} \end{bmatrix}, \quad \nabla f_6 = \begin{bmatrix} 0 & x_{13} & x_{12} \\ 0 & x_{23} & x_{22} \\ 0 & x_{33} & x_{32} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

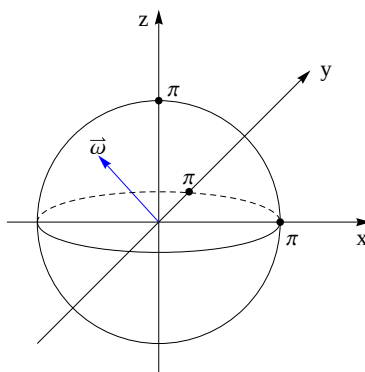
Če bi bila neka linearna kombinacija teh gradientov enaka nič, bi od tod sledilo, da je neka linearna kombinacija stolpcev matrike Q enaka nič. To pa se ne more zgoditi na matrikah iz $O(3)$. Ker je $\dim \mathbb{R}^{3 \times 3} = 9$ in imamo 6 vezi, je $SO(3)$ tridimenzionalna mnogoterost.

V nadaljevanju bomo spoznali tri parametrizacije grupe $SO(3)$.

Osno-kotno parametrizacija:

Pri tej parametrizaciji bomo grupo rotacij predstavili kot kvocientni prostor krogle $B^3(0, \pi)$, ki ga dobimo, če identificiramo antipodne točke na sferi, ki je rob krogle

$$SO(3) \approx B^3(0, \pi) / \{\vec{\omega} \sim -\vec{\omega} \text{ za } \vec{\omega} \text{ na robu } B^3(0, \pi)\}.$$



Izberimo neničeln vektor $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ in pišimo $\vec{e} = \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$ ter $\phi = |\vec{\omega}|$. Vektorju $\vec{\omega}$ bomo priredili rotacijo $R(\vec{e}, \phi)$ prostora $\mathbb{R}^3$, ki predstavlja vrtenje za kot ϕ okoli osi $\vec{e}$. To pomeni, da:

- smer vektorja $\vec{\omega}$ določa os vrtenja,
- velikost vektorja $\vec{\omega}$ določa kot vrtenja.

Os vrtenja ni dobro definirana za ničelni vektor. Njemu priredimo identično preslikavo. Če hočemo nek vektor $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ zavrteti okrog dane osi $\vec{e}$ za kot ϕ , je zelo uporabna Rodriguesova formula

$$R(\vec{e}, \phi) \cdot \vec{r} = \cos \phi \vec{r} + (\vec{e} \cdot \vec{r})(1 - \cos \phi)\vec{e} + \sin \phi \vec{e} \times \vec{r}.$$

To formulo lahko uporabimo za zapis rotacijske matrike. Splača si zapomniti matrike, ki ustrezajo rotacijam okoli koordinatnih osi. Recimo, da bi radi izračunali matriko rotacije

za kot ϕ okoli osi $\vec{e} = \vec{j}$. Če označimo $\vec{r} = (x, y, z)$, dobimo:

$$\begin{aligned} R(\vec{j}, \phi) \cdot \vec{r} &= \cos \phi \vec{r} + (\vec{j} \cdot \vec{r})(1 - \cos \phi)\vec{j} + \sin \phi \vec{j} \times \vec{r}, \\ &= \cos \phi (x, y, z) + y(1 - \cos \phi)(0, 1, 0) + \sin \phi (0, 1, 0) \times (x, y, z), \\ &= \cos \phi (x, y, z) + y(1 - \cos \phi)(0, 1, 0) + \sin \phi (z, 0, -x), \\ &= (\cos \phi x + \sin \phi z, y, -\sin \phi x + \cos \phi z). \end{aligned}$$

Od tod sledi, da rotaciji $R(\vec{j}, \phi)$ ustreza rotacijska matrika

$$R(\vec{j}, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}.$$

Podobno lahko izračunamo še matriki za rotacije okoli preostalih dveh koordinatnih osi

$$R(\vec{i}, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad R(\vec{k}, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Če imamo dano netrivialno rotacijsko matriko Q , lahko os in kot rotacije določimo po naslednjem postopku:

- Kot $\phi \in [0, \pi]$ dobimo iz formule $\cos \phi = \frac{\text{sl}(Q)-1}{2}$.
- Os vrtenja je vzporedna lastnemu vektorju $\vec{e}$ matrike Q , ki ustreza lastni vrednosti $\lambda = 1$. Eksplicitno je za $\phi \in (0, \pi)$ to vektor

$$\vec{e} = \frac{1}{2 \sin \phi} \begin{bmatrix} x_{32} - x_{23} \\ x_{13} - x_{31} \\ x_{21} - x_{12} \end{bmatrix}.$$

Formalno lahko osno-kotno parametrizacijo smatramo kot preslikavo

$$R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{SO}(3),$$

ki ima naslednje lastnosti:

- Zožitev R na notranjost krogle $B^3(0, \pi)$ je injektivna in regularna parametrizacija. V njeni sliki so vse rotacije razen rotacij za kot $\phi = \pi$.
- Zožitev R na $B^3(0, \pi)$ je surjektivna, dve antipodni točki na robu pa preslika v isto rotacijo. Od tod sledi, da je

$$\text{SO}(3) \approx B^3(0, \pi) / \{\vec{\omega} \sim -\vec{\omega} \text{ za } \vec{\omega} \text{ na robu } B^3(0, \pi)\}.$$

- Odvod zožitve R na $B^3(0, 2\pi)$ ima maksimalen rang, kar pomeni, da je osno-kotna parametrizacija regularna.
- Gladkost preslikave R sledi iz dejstva, da se ujema z eksponentno preslikavo Liejeve grupe $\text{SO}(3)$. Označimo z $\exp : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \text{SO}(3)$ matrični eksponent

$$\exp(W) = e^W = I + W + \frac{W^2}{2!} + \frac{W^3}{3!} + \dots$$

Osnovno kotno parametrizacijo lahko potem zapišemo kot kompozitum $R = \exp \circ W$, kar pomeni, da je

$$R(\vec{\omega}) = e^{W(\vec{\omega})} = I + W(\vec{\omega}) + \frac{W(\vec{\omega})^2}{2!} + \frac{W(\vec{\omega})^3}{3!} + \dots,$$

kjer smo označili

$$W(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

Parametrizacija z Eulerjevimi koti:

Vsako rotacijo lahko zapišemo kot kompozicijo 3 rotacij okoli koordinatnih osi. V praksi se uporablja več konvencij, v mehaniki pa dano rotacijo najbolj pogosto zapišemo v obliki

$$R = R(\vec{k}, \phi) \circ R(\vec{i}, \theta) \circ R(\vec{k}, \psi),$$

kjer je $\psi, \phi \in [0, 2\pi]$ in $\theta \in [0, \pi]$. Kotom ϕ, θ in ψ rečemo precesija, nutacija in kot lastne rotacije. Tukaj grupo rotacij predstavimo s kvadrom $[0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, pri računanju pa se pojavi problem v točkah $\theta = 0$ ali $\theta = \pi$. V okolici teh točk ne moremo izračunati inverza te parametrizacije niti lokalno.

Kvaternionaska parametrizacija:

Sedaj bomo grupo rotacij predstavili kot kvocient tridimenzionalne sfere pri identifikaciji antipodnih točk

$$SO(3) \approx S^3 / \{q \sim -q\}.$$

Najprej se spomnimo, da lahko prostor $\mathbb{R}^4$ identificiramo s kvaternioni. Vsak $q \in \mathbb{R}^4$ lahko zapišemo v obliki

$$q = t + xi + yj + zk = (t, \vec{r}).$$

Vektorje v $\mathbb{R}^3$ pri tem zapisu identificiramo s kvaternioni, ki imajo skalarni del enak nič. Podobno kot pri kompleksnih številih imamo tudi pri kvaternionih konjugiranje

$$q^* = (t, -\vec{r}),$$

množenje kvaternionov pa lahko strnemo v formulo

$$q_1 q_2 = (t_1 t_2 - \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2, t_1 \vec{r}_2 + t_2 \vec{r}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2).$$

Enotski kvaternioni tvorijo grupo

$$S^3 = \{(t, \vec{r}) \in \mathbb{R}^4 \mid t^2 + |\vec{r}|^2 = 1\}.$$

Preslikava $R : S^3 \rightarrow SO(3)$, ki kvaternionu q priredi rotacijo $R(q)$ s predpisom

$$R(q)(\vec{r}) = q(0, \vec{r})q^*,$$

je surjektiven homomorfizem grup z jedrom $\ker R = \{1, -1\}$. Če je Q rotacija za kot $\phi \in [0, \pi]$ okoli osi $\vec{e}$, je Q oblike $Q = R(q)$ za

$$q = \pm \left(\cos \frac{\phi}{2}, \sin \frac{\phi}{2} \vec{e} \right).$$

Če zožimo preslikavo R na kvaternione s pozitivnim skalarnim delom, dobimo injektivno regularno parametrizacijo grupe $SO(3)$. V sliki te parametrizacije so spet vse rotacije

razen tistih za kot $\phi = \pi$. Pokažimo sedaj zgornjo enakost. Za poljuben $q = (t, \vec{r}) \in S^3$ velja:

$$\begin{aligned} R(q)(\vec{x}) &= (t, \vec{r}) \cdot (0, \vec{x}) \cdot (t, -\vec{r}) = (-\vec{r} \cdot \vec{x}, t\vec{x} + \vec{r} \times \vec{x})(t, -\vec{r}), \\ &= (-t\vec{r} \cdot \vec{x} + t\vec{r} \cdot \vec{x}, t^2\vec{x} + 2t\vec{r} \times \vec{x} + (\vec{r} \cdot \vec{x})\vec{r} - (\vec{r} \times \vec{x}) \times \vec{r}), \\ &= (0, (t^2 - |\vec{r}|^2)\vec{x} + 2t\vec{r} \times \vec{x} + 2(\vec{r} \cdot \vec{x})\vec{r}). \end{aligned}$$

Sedaj bomo upoštevali, da je q enotski kvaternion, kar pomeni, da je

$$t^2 + |\vec{r}|^2 = 1.$$

Med drugim od tod sledi, da je $t \in [-1, 1]$, kar pomeni, da obstaja enolično določen kot $\phi \in [0, \pi]$, da je $t = \cos \phi$. Nadalje velja $|\vec{r}| = \sin \phi$, zato lahko pišemo $\vec{r} = \sin \phi \vec{e}$ za nek enotski vektor $\vec{e}$. Ta vektor je natanko določen, če je $\phi \in (0, \pi)$. Ko to vstavimo v zgornji izraz, dobimo:

$$\begin{aligned} R(q)(\vec{x}) &= (0, (t^2 - |\vec{r}|^2)\vec{x} + 2t\vec{r} \times \vec{x} + 2(\vec{r} \cdot \vec{x})\vec{r}), \\ &= (0, (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)\vec{x} + 2 \cos \phi \sin \phi \vec{e} \times \vec{x} + 2 \sin^2 \phi (\vec{e} \cdot \vec{x})\vec{e}), \\ &= (0, \cos(2\phi)\vec{x} + \sin(2\phi)\vec{e} \times \vec{x} + (1 - \cos(2\phi))(\vec{e} \cdot \vec{x})\vec{e}). \end{aligned}$$

Iz Rodriguesove formule sedaj sledi, da je $R(q)$ rotacija okoli osi $\vec{e}$ za kot 2ϕ .

V koordinatah lahko eksplicitno opišemo matriko $R(q)$ z naslednjo formulo

$$R(q) = \begin{bmatrix} t^2 + x^2 - y^2 - z^2 & 2(xy - tz) & 2(xz + ty) \\ 2(xy + tz) & t^2 + y^2 - x^2 - z^2 & 2(zy - tx) \\ 2(xz - ty) & 2(zy + tx) & t^2 + z^2 - x^2 - y^2 \end{bmatrix}.$$

□

- (2) Rotacija $Q(t) = Q_2(t)Q_1(t)$ je podana kot kompozitum dveh rotacij $Q_1(t) = R(\vec{i}, \omega t)$ in $Q_2(t) = R(\vec{k}, \Omega t)$. Izračunaj rotacijski vektor in vektor kotne hitrosti rotacije $Q(t)$.

Rešitev: Vrtenje togega telesa lahko opišemo z gladko potjo

$$Q : \mathbb{R} \rightarrow \text{SO}(3).$$

Odvod te preslikave $\dot{Q}(t)$ je potem neka matrika, ki leži v tangentnem prostoru $T_{Q(t)} \text{SO}(3)$. Da bi lahko te pojme bolje razumeli, bomo v nadaljevanju izračunali tangentne prostore mnogoterosti $\text{SO}(3)$.

Tangentni prostor $T_I \text{SO}(3)$ v enoti grupe $\text{SO}(3)$:

Tangentni prostor $T_I \text{SO}(3)$ bi lahko dobili kot ortogonalni komplement prostora, ki ga napenjajo gradienti vezi, vendar se bomo naloge raje lotili drugače. Tangentni prostor namreč sestoji iz hitrosti vseh poti skozi točko I. Denimo torej, da je

$$Q(t) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \text{SO}(3)$$

gladka pot, za katero je $Q(0) = I$. Potem je $\dot{Q}(0) \in T_I \text{SO}(3)$. Ker je $Q(t)$ pot v $\text{SO}(3)$, mora za vsak $|t| < \epsilon$ veljati $Q(t)^T Q(t) = I$. Če to enakost odvajamo in vstavimo $t = 0$, dobimo:

$$\begin{aligned} \dot{Q}(0)^T Q(0) + Q(0)^T \dot{Q}(0) &= 0, \\ \dot{Q}(0)^T + \dot{Q}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Vidimo, da je hitrost poljubne poti skozi enoto grupe $\text{SO}(3)$ neka antisimetrična matrika. Če je po drugi strani W neka poljubna antisimetrična matrika, pa lahko dokažemo, da za pot $Q(t) = e^{tW}$ za vsak $t \in \mathbb{R}$ velja $Q(t) \in \text{SO}(3)$ in $\dot{Q}(0) = W$. Tangentni prostor $T_1 \text{SO}(3)$ torej sestoji iz vseh antisimetričnih matrik. Pogosto ga označimo z

$$\mathfrak{so}(3) = T_1 \text{SO}(3) = \{W \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid W^T + W = 0\}.$$

Kasneje bomo videli, da je $\mathfrak{so}(3)$ Liejeva algebra, ki je izomorfna znani Liejevi algebri $\mathbb{R}^3$ z operacijo vektorskega produkta. Ekspliciten izomorfizem

$$W : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3)$$

je podan s predpisom

$$W(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

Tangentni prostor $T_Q \text{SO}(3)$ v poljubni točki $Q \in \text{SO}(3)$:

Tangentni prostor $T_Q \text{SO}(3)$ za poljubno $Q \in \text{SO}(3)$ bomo sedaj izrazili s prostorom $\mathfrak{so}(3)$. Denimo, da je $Q(t) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \text{SO}(3)$ gladka pot, za katero je $Q(0) = Q$. Z odvajanjem identitete $Q(t)^T Q(t) = I$ pri $t = 0$ potem dobimo:

$$\begin{aligned} \dot{Q}(0)^T Q(0) + Q(0)^T \dot{Q}(0) &= 0, \\ \dot{Q}(0)^T Q + Q^T \dot{Q}(0) &= 0, \end{aligned}$$

Sedaj je matrika $Q^T \dot{Q}(0)$ antisimetrična, kar pa pomeni, da je $\dot{Q}(0) \in Q \cdot \mathfrak{so}(3)$. Tangentni prostor $T_Q \text{SO}(3)$ lahko torej opišemo v obliki

$$T_Q \text{SO}(3) = Q \cdot \mathfrak{so}(3).$$

Če bi namesto identitete $Q(t)^T Q(t) = I$ odvajali identiteto $Q(t)Q(t)^T = I$, bi s podobnim računom prišli do enakosti

$$T_Q \text{SO}(3) = \mathfrak{so}(3) \cdot Q.$$

Vidimo, da imamo dve naravni identifikaciji tangentnega prostora $T_Q \text{SO}(3)$ s prostorom $\mathfrak{so}(3)$, ki sta podani z levim oziroma desnim množenjem:

$$\begin{aligned} Q \cdot - : \mathfrak{so}(3) &\rightarrow T_Q \text{SO}(3), \\ - \cdot Q : \mathfrak{so}(3) &\rightarrow T_Q \text{SO}(3). \end{aligned}$$

Ti dve identifikaciji nam bosta prišli prav pri računanju kotne hitrosti vrtenja togega telesa. Eksplicitno tako dobimo elementa

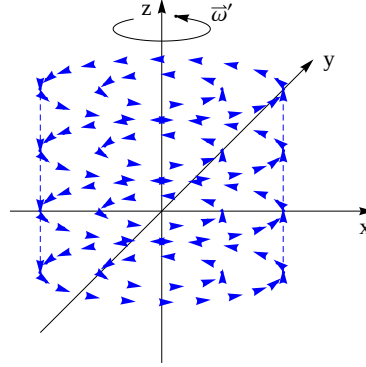
$$Q(t)^T \dot{Q}(t), \dot{Q}(t)Q(t)^T \in \mathfrak{so}(3).$$

Ta primerjava nam omogoča, da hitrost vrtenja enačimo z neko antisimetrično matriko. Če nadalje uporabimo še izomorfizem W , pa lahko hitrost vrtenja enačimo kar z vektorji v $\mathbb{R}^3$. Vektorjema:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}'(t) &= W^{-1} \left(\dot{Q}(t)Q(t)^T \right), \\ \vec{\omega}(t) &= W^{-1} \left(Q(t)^T \dot{Q}(t) \right) \end{aligned}$$

rečemo vektor kotne hitrosti in rotacijski vektor rotacije $Q(t)$.

Poglejmo si najprej primer, ko je $Q(t) = R(\vec{k}, \omega t)$ enakomerna rotacija okoli navpične osi. V tem primeru lahko izračunamo, da velja $\vec{\omega}'(t) = \omega \vec{k}$ in $\vec{\omega}(t) = \omega \vec{e}_3$.



To vrtenje določa hitrostno polje, ki ga lahko zapišemo z enačbo

$$\vec{v}'(x, y, z) = \vec{\omega}' \times (x, y, z) = (-\omega y, \omega x, 0).$$

Vidimo, da na osi rotacije (oziroma v smeri vektorja kotne hitrosti) ležijo natanko tiste točke, ki pri vrtenju mirujejo.

V primeru poljubne rotacije $Q = Q(t)$ dobimo na analogen način hitrostno polje, ki pa se spreminja v odvisnosti od časa. Izkaže pa se, da v vsakem trenutku obstaja neka os v prostoru, na kateri točke mirujejo. Tej osi rečemo trenutna os vrtenja. Če zamrznemo hitrostno polje v danem trenutku, bo izgledalo podobno kot na zgornji sliki, le da bo namesto osi z krožilo okoli trenutne osi vrtenja. Vektor kotne hitrosti je tedaj vektor v smeri trenutne osi vrtenja, ki je implicitno določen z enačbo $\vec{v}'(\vec{r}, t) = \vec{\omega}'(t) \times \vec{r}$. Rotacijski vektor rotacije ustreza vektorju kotne hitrosti, le da ga gledamo v RKS.

Če imamo rotacijo podano v obliki $R(\vec{e}(t), \phi(t))$, lahko vektor kotne hitrosti in pa rotacijski vektor izračunamo z uporabo formul:

$$\begin{aligned}\vec{\omega}'(t) &= \dot{\phi} \vec{e} + \sin \phi \dot{\vec{e}} + (1 - \cos \phi) \vec{e} \times \dot{\vec{e}}, \\ \vec{\omega}(t) &= \dot{\phi} \vec{e} + \sin \phi \dot{\vec{e}} - (1 - \cos \phi) \vec{e} \times \dot{\vec{e}}.\end{aligned}$$

Rotacij praviloma nimamo predstavljenih v takšni obliki. Pogosto pa jih zapišemo kot kompozicije rotacij okoli fiksnih osi, kjer posamezni koti ustrezajo Eulerjevim kotom rotacije. V takih primerih najprej izračunamo vektor kotne hitrosti in pa rotacijski vektor za vsako rotacijo posebej in nato uporabimo formuli za kompozitum.

V našem primeru za rotaciji Q_1 in Q_2 velja:

$$\begin{aligned}\vec{\omega}'_1(t) &= \omega \vec{i}, & \vec{\omega}'_2(t) &= \Omega \vec{k}, \\ \vec{\omega}_1(t) &= \omega \vec{e}_1, & \vec{\omega}_2(t) &= \Omega \vec{e}_3.\end{aligned}$$

Za izračun kotne hitrosti kompozituma si sedaj pomagamo s formulama:

$$\begin{aligned}\vec{\omega}'_{21}(t) &= \vec{\omega}'_2(t) + Q_2(t) \vec{\omega}'_1(t), \\ \vec{\omega}_{21}(t) &= Q_1(t)^T \vec{\omega}_2(t) + \vec{\omega}_1(t).\end{aligned}$$

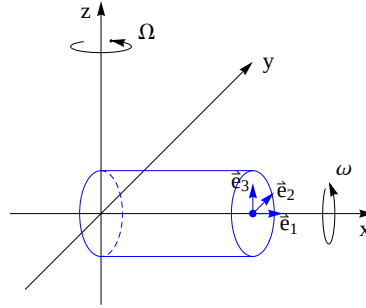
Matriki, ki ustrezata rotacijama $Q_1(t)$ in $Q_2(t)$, sta

$$Q_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega t & -\sin \omega t \\ 0 & \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}, \quad Q_2(t) = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t & 0 \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

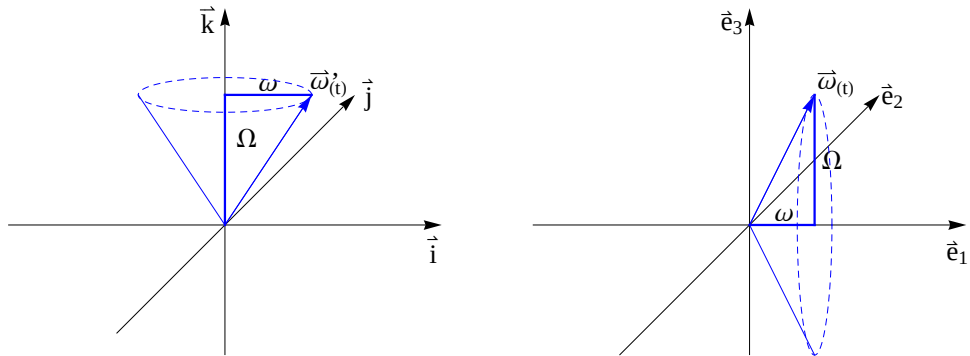
od koder sledi:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}'_{21}(t) &= \Omega \vec{k} + \omega (\cos \Omega t \vec{i} + \sin \Omega t \vec{j}), \\ \vec{\omega}_{21}(t) &= \omega \vec{e}_1 + \Omega (\sin \omega t \vec{e}_2 + \cos \omega t \vec{e}_3). \end{aligned}$$

Kot zgled naše rotacije si pogledjmo valj, katerega os na začetku sovpada z x -osjo. Rotacija Q potem predstavlja vrtenje valja, ki sestoji iz vrtenja okoli osi valja s kotno hitrostjo ω in pa iz precesije osi valja okoli navpične osi s kotno hitrostjo Ω .



Vektor kotne hitrosti ima konstantno navpično komponento Ω in pa vodoravno komponento ω , ki precesira s kotno hitrostjo Ω okoli navpične osi. Če ga pogledamo v bazi, ki se vrti skupaj z valjem, pa dobimo rotacijski vektor, ki ima konstantno komponento ω v smeri osi valja. Komponenta, ki je pravokotna na os valja, pa ima velikost Ω in kroži okoli osi valja s kotno hitrostjo ω .



□