

Mehanika 1

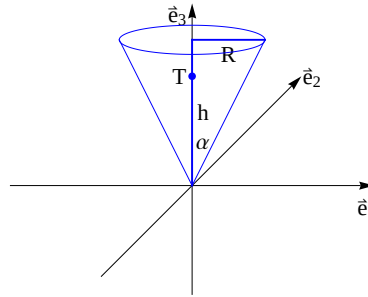
Dinamika togega telesa

(1) Homogen stožec je omejen s ploskvami $z = 0$, $z = h$ in $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$.

(a) Izračunaj težišče stožca.

(b) Izračunaj vztrajnostni tenzor stožca glede na vrh in glede na težišče stožca.

Rešitev: (a) Najprej bomo izračunali težišče stožca.



Koordinate težišča T togega telesa V lahko v splošnem izračunamo s pomočjo formule

$$T = \frac{1}{m} \iiint_V \vec{r} \rho dV.$$

Stožec bomo parametrizirali s cilindričnimi koordinatami:

$$\begin{aligned} z &\in [0, h], \\ \phi &\in [0, 2\pi], \\ r &\in \left[0, z \frac{R}{h}\right]. \end{aligned}$$

Zaradi rotacijske simetrije leži težišče stožca na osi simetrije, od koder sledi $T_x = T_y = 0$. Zato moramo izračunati samo z koordinato težišča.

$$\begin{aligned} T_z &= \frac{1}{m} \iiint_V z \rho dV = \frac{\rho}{m} \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{z \frac{R}{h}} z r dr, \\ &= \frac{\rho}{m} \int_0^h dz \int_0^{2\pi} z \frac{z^2 R^2}{2h^2} d\phi, \\ &= \frac{R^2}{2Vh^2} \int_0^h 2\pi z^3 dz, \\ &= \frac{\pi R^2}{Vh^2} \frac{h^4}{4} = \frac{\pi R^2 h}{3V} \frac{3h}{4}, \\ &= \frac{3}{4} h. \end{aligned}$$

Pri izračunu smo upoštevali, da za homogeno telo velja $\rho = \frac{m}{V}$ in da je volumen stožca enak $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$. Težišče stožca je torej v točki

$$T = \left(0, 0, \frac{3}{4}h\right).$$

(b) Vztrajnostni tenzor togega telesa J_0 je analog mase pri vrtenju telesa okoli točke 0. Če ga zapišemo po komponentah, je vztrajnostni tenzor 3×3 simetrična matrika, ki je odvisna od:

- izbire točke 0,
- orientacije koordinatnih osi.

Omogoča nam, da izračunamo kinetično energijo in vrtilno količino togega telesa, ključno vlogo pa igra tudi v Eulerjevih dinamičnih enačbah. Zaradi simetričnosti zmeraj obstajajo tri osi v prostoru, okrog katerih je možna enakomerna rotacija togega telesa. Za vrtenje okoli ostalih osi je načeloma potreben navor.

Pri računanju vztrajnostnega tenzorja ponavadi izberemo koordinatne osi in izhodišče tako, da dobimo diagonalno matriko. Pri premiku izhodišča se vztrajnostni tenzor transformira po Steinerjevem izreku, pri spremembi orientacije koordinatnih osi pa je potrebno matriko vztrajnostnega tenzorja konjugirati s prehodno matriko.

V danih koordinatah s središčem v točki 0 ima vztrajnostni tenzor komponente

$$J_0 = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} = \iiint_V \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \rho dV.$$

Računajmo:

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \iiint_V (y^2 + z^2) \rho dV = \rho \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{z\frac{R}{h}} (r^2 \sin^2 \phi + z^2) r dr, \\ &= \rho \int_0^h dz \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 \phi \frac{R^4 z^4}{4h^4} + \frac{R^2 z^4}{2h^2} \right) d\phi, \\ &= \rho \int_0^h \left(\pi \frac{R^4 z^4}{4h^4} + 2\pi \frac{R^2 z^4}{2h^2} \right) dz, \\ &= \rho \pi \left(\frac{R^4 h}{20} + \frac{R^2 h^3}{5} \right), \\ &= \frac{3}{5} m \left(\frac{R^2}{4} + h^2 \right). \end{aligned}$$

Analogen račun nam da $J_{yy} = J_{xx} = \frac{3}{5} m \left(\frac{R^2}{4} + h^2 \right)$, za J_{zz} pa velja:

$$\begin{aligned} J_{zz} &= \iiint_V (x^2 + y^2) \rho dV = \rho \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{z\frac{R}{h}} r^3 dr, \\ &= 2\pi \rho \int_0^h \frac{R^4 z^4}{4h^4} dz, \\ &= \frac{3}{10} m R^2. \end{aligned}$$

Če ima naše telo dovolj simetrij, nam deviacijskih momentov J_{xy} , J_{xz} in J_{yz} pogosto ni treba računati. Normala na ravnino zrcalne simetrije homogenega telesa je namreč zmeraj v smeri glavne osi vztrajnostnega tenzorja. V praksi to pomeni:

- Telo je simetrično glede na ravnino $xy \implies J_{xz} = J_{yz} = 0$,
- Telo je simetrično glede na ravnino $xz \implies J_{xy} = J_{zy} = 0$,
- Telo je simetrično glede na ravnino $yz \implies J_{yx} = J_{zx} = 0$.

Naš stožec je simetričen glede na ravnini xz in yz , zato je $J_{xy} = J_{zy} = J_{zx} = 0$. Tako dobimo

$$J_{\text{vrh}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}m(\frac{R^2}{4} + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5}m(\frac{R^2}{4} + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}mR^2 \end{bmatrix}.$$

Ko imamo enkrat izračunan vztrajnostni tenzor togega telesa glede na neko točko, ga lahko z uporabo Steinerjevega izreka hitro izračunamo glede na poljubno drugo točko. Med vztrajnostnima tenzorjema J_0 in J_* velja zveza

$$J_0 = J_* + mr^2 \text{Id} - m\vec{r} \otimes \vec{r},$$

kjer je $\vec{r}$ vektor od težišča do točke 0 in $r = |\vec{r}|$. Pri nas je $\vec{r} = (0, 0, -\frac{3}{4}h)$, $r^2 = \frac{9}{16}h^2$ in

$$J_* = J_{\text{vrh}} - mr^2 \text{Id} + m\vec{r} \otimes \vec{r} = \begin{bmatrix} \frac{3}{20}m(R^2 + \frac{h^2}{4}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}m(R^2 + \frac{h^2}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}mR^2 \end{bmatrix}.$$

□

- (2) Izračunaj kinetično energijo stožca, ki se kotali po ravnini, v primeru, ko je $h = R$.

Rešitev: Kinetično energijo togega telesa lahko izračunamo na dva načina. Če se telo vrti okoli točke 0, je njegova kinetična energija enaka

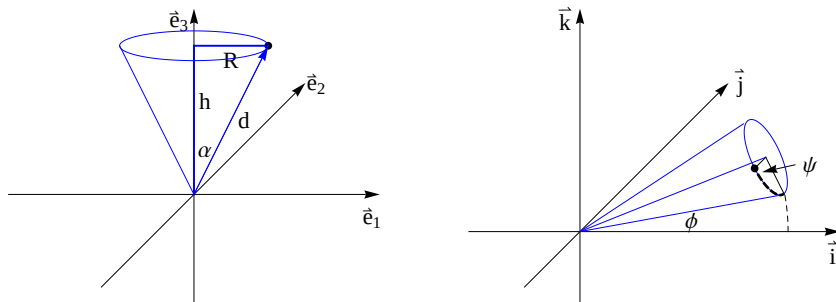
$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \langle \vec{\omega}, J_0 \cdot \vec{\omega} \rangle.$$

Za splošno gibanje togega telesa pa velja

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m|\vec{v}_*|^2 + \frac{1}{2} \langle \vec{\omega}, J_* \cdot \vec{\omega} \rangle.$$

- (1) Izračun kotne hitrosti vrtenja stožca:

Relativni koordinatni sistem si bomo izbrali tako, da bo os stožca kazala v smeri vektorja $\vec{e}_3$. Položaj stožca med kotaljenjem bo nato natanko določen s kotoma ψ in ϕ , kjer nam parameter ψ določa kot zavrtitve stožca okoli lastne osi, parameter ϕ pa kot med dotikališčem stožca in ravnine ter abscisno osjo.



Položaj stožca med kotaljenjem glede na osnovni položaj lahko opišemo z rotacijo

$$Q(t) = Q_3(t)Q_2(t)Q_1(t),$$

kjer je:

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= R(\vec{k}, \psi(t)), \\ Q_2(t) &= R\left(\vec{j}, \frac{\pi}{2} - \alpha\right), \\ Q_3(t) &= R(\vec{k}, \phi(t)). \end{aligned}$$

Če bi stožec podrsaval po podlagi, bi bila parametra ϕ in ψ neodvisna, pogoj kotaljenja pa nam bo omogočil, da enega izrazimo z drugim. Matematično definiramo kotaljenje telesa po podlagi s pogojem, da točke na stičišču telesa in podlage mirujejo, oziroma, da je njihova hitrost enaka nič. V našem primeru nam da pogoj kotaljenja naslednjo vez

$$d\phi = -R\psi$$

med parametroma ϕ in ψ . Predznak je negativen, ker se pri kotaljenju v pozitivni smeri okoli navpične osi kot ψ zmanjšuje. Iz zveze $\frac{R}{d} = \sin \alpha$ od tod sledi

$$\psi = -\frac{1}{\sin \alpha} \phi.$$

Za izračun kotne hitrosti kotaljenja bomo najprej izračunali kotne hitrosti posameznih rotacij

$$\vec{\omega}_1(t) = \dot{\psi} \vec{e}_3, \quad \vec{\omega}_2(t) = 0, \quad \vec{\omega}_3(t) = \dot{\phi} \vec{e}_3.$$

Matrike teh rotacij pa so

$$Q_1(t) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Q_2(t) = \begin{bmatrix} \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \alpha & 0 & \sin \alpha \end{bmatrix}, Q_3(t) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

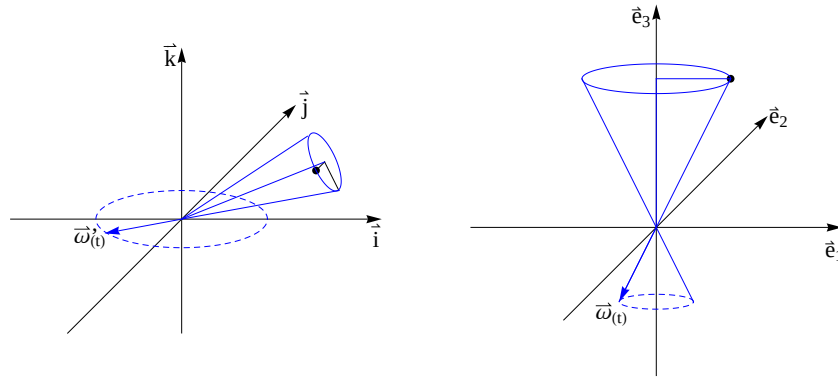
Kotno hitrost rotacije $Q(t)$ bomo izračunali v dveh korakih. Za rotacijo $Q_2(t)Q_1(t)$ velja

$$\vec{\omega}_{21}(t) = Q_1(t)^T \vec{\omega}_2(t) + \vec{\omega}_1(t) = \dot{\psi} \vec{e}_3.$$

Nadalje pa je $Q(t) = Q_3(t) (Q_2(t)Q_1(t))$, od koder dobimo

$$\vec{\omega}_{321}(t) = (Q_2Q_1(t))^T \vec{\omega}_3(t) + \vec{\omega}_{21}(t) = -\dot{\phi} \operatorname{ctg} \alpha (\cos \psi \sin \alpha \vec{e}_1 + \sin \psi \sin \alpha \vec{e}_2 + \cos \alpha \vec{e}_3).$$

Vektor kotne hitrosti je v danem trenutku vzporeden dotikališču stožca in ravnine, vendar pa je zaradi kotaljenja stožca v pozitivni smeri obrnjen v nasprotno smer kot stožec. Lahko bi ga izračunali tudi direktno, saj iz pogoja kotaljenja takoj sledi, da je trenutna os vrtenja vzporedna z dotikališčem stožca in ravnine. Smer in velikost kotne hitrosti pa potem dobimo z izračunom hitrosti neke druge točke v stožcu. Rotacijski vektor pa v tem primeru kroži po plašču stožca, vendar z negativnim predznakom.



(2) Izračun kinetične energije stožca:

V našem primeru lahko uporabimo obe formuli, saj je pri kotaljenju vrh stožca pri miru. Za ilustracijo bomo zato kinetično energijo stožca izračunali na oba načina.

1. način: Vrtenje stožca okrog vrha:

Izračunali smo že, da je rotacijski vektor kotaljenja enak

$$\vec{\omega}(t) = -\dot{\phi} \operatorname{ctg} \alpha (\cos \psi \sin \alpha \vec{e}_1 + \sin \psi \sin \alpha \vec{e}_2 + \cos \alpha \vec{e}_3),$$

vztrajnostni tenzor glede na vrh stožca pa

$$J_{\text{vrh}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}m(\frac{R^2}{4} + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5}m(\frac{R^2}{4} + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}mR^2 \end{bmatrix}.$$

Diagonalne člene vztrajnostnega tenzorja označimo z $J_1 = J_2 = \frac{3}{5}m(\frac{R^2}{4} + h^2)$, $J_3 = \frac{3}{10}mR^2$, komponente rotacijskega vektorja pa z:

$$\omega_1 = -\dot{\phi} \operatorname{ctg} \alpha \cos \psi \sin \alpha,$$

$$\omega_2 = -\dot{\phi} \operatorname{ctg} \alpha \sin \psi \sin \alpha,$$

$$\omega_3 = -\dot{\phi} \operatorname{ctg} \alpha \cos \alpha.$$

Potem je:

$$\begin{aligned} W_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} \langle \vec{\omega}, J_{\text{vrh}} \cdot \vec{\omega} \rangle = \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2), \\ &= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha (J_1 \sin^2 \alpha + J_3 \cos^2 \alpha), \\ &= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \left(\frac{3}{5}m \left(\frac{R^2}{4} + h^2 \right) \sin^2 \alpha + \frac{3}{10}mR^2 \cos^2 \alpha \right), \\ &= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \frac{3}{10}m \left(\left(\frac{R^2}{2} + 2h^2 \right) \sin^2 \alpha + R^2 \cos^2 \alpha \right), \\ &= \frac{3}{20}m\dot{\phi}^2 \left(\frac{h^2}{2} \sin^2 \alpha + 2h^2 \cos^2 \alpha + h^2 \cos^2 \alpha \right), \\ &= \frac{3}{40}mh^2\dot{\phi}^2 (\sin^2 \alpha + 6 \cos^2 \alpha). \end{aligned}$$

Če upoštevamo, da je $h = R$ in $\alpha = 45^\circ$, dobimo

$$T = \frac{21}{80} m R^2 \dot{\phi}^2.$$

2. način: Gibanje težišča plus vrtenje stožca okrog težišča:

Rotacijski vektor kotaljenja je enak kot prej, vztrajnostni tenzor glede na težišče pa je

$$J_* = \begin{bmatrix} \frac{3}{20}m(R^2 + \frac{h^2}{4}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}m(R^2 + \frac{h^2}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}mR^2 \end{bmatrix}.$$

Diagonalne člene vztrajnostnega tenzorja spet označimo z $J_1 = J_2$ in J_3 , komponente rotacijskega vektorja pa z ω_1 , ω_2 in ω_3 . Hitrost težišča je $|\vec{v}_*| = \frac{3}{4}h \cos \alpha |\dot{\phi}|$. Sledi:

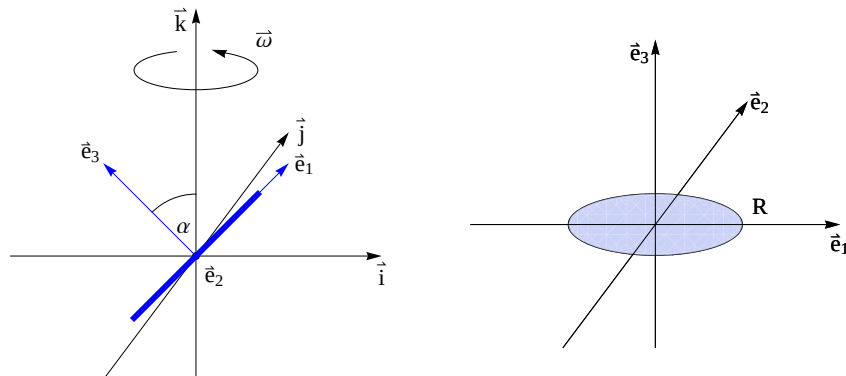
$$\begin{aligned} W_{\text{kin}} &= \frac{1}{2}m|\vec{v}_*|^2 + \frac{1}{2}\langle \vec{\omega}, J_* \cdot \vec{\omega} \rangle = \frac{1}{2}m|\vec{v}_*|^2 + \frac{1}{2}(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2), \\ &= \frac{1}{2}m \cdot \frac{9}{16}h^2 \cos^2 \alpha \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \text{ctg}^2 \alpha (J_1 \sin^2 \alpha + J_3 \cos^2 \alpha), \\ &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \left(\frac{9}{16}mh^2 \cos^2 \alpha + \text{ctg}^2 \alpha \left(\frac{3}{20}m \left(R^2 + \frac{h^2}{4} \right) \sin^2 \alpha + \frac{3}{10}mR^2 \cos^2 \alpha \right) \right), \\ &= \frac{1}{2}mh^2\dot{\phi}^2 \left(\frac{3}{20} \sin^2 \alpha + \frac{9}{10} \cos^2 \alpha \right), \\ &= \frac{3}{40}mh^2\dot{\phi}^2 (\sin^2 \alpha + 6 \cos^2 \alpha), \\ &= \frac{21}{80}mR^2\dot{\phi}^2. \end{aligned}$$

□

- (3) Homogen disk z maso m in polmerom R se enakomerno s kotno hitrostjo ω vrtili okoli osi, ki gre skozi središče diska. Kot med osjo vrtenja in normalo na disk je enak α .

- Izračunaj vztrajnostni tenzor diska v prostorski bazi.
- Izračunaj vektor vrtilne količine v telesni in v prostorski bazi.
- Zapiši Eulerjeve dinamične enačbe in izračunaj navor, ki je potreben za vrtenje diska.

Rešitev: (a) Pri študiju dinamike togega telesa imamo na voljo dva koordinatna sistema. Gibanje telesa ponavadi opazujemo iz prostorskega koordinatnega sistema, v katerem veljata Newtonov zakon in zakon o vrtilni količini. Stvari pa se včasih poenostavijo v telesnem koordinatnem sistemu, ki se vrtili skupaj s telesom.



Telesni koordinatni sistem si bomo izbrali tako, da bo disk ležal v ravnini vektorjev $\vec{e}_1$ in $\vec{e}_2$. V splošnem je vztrajnostni tenzor plošče S , ki leži v xy -ravnini, definiran s predpisom

$$J_0 = \iint_S \begin{bmatrix} y^2 & -xy & 0 \\ -xy & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \rho dS.$$

Za homogen disk s polmerom R tako dobimo

$$J_{xx} = \iint_S y^2 \rho dS = \rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^2 \sin^2 \phi r dr = \rho \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} \sin^2 \phi d\phi = \rho \frac{\pi R^4}{4} = \frac{1}{4} m R^2.$$

Analogno dobimo še $J_{yy} = J_{xx} = \frac{1}{4} m R^2$ ter $J_{zz} = J_{xx} + J_{yy} = \frac{1}{2} m R^2$. Zaradi simetrije sta izvendiagonalna člena enaka nič. V telesni bazi ima vztrajnostni tenzor diska torej obliko

$$J_* = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} m R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} m R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} m R^2 \end{bmatrix}.$$

Njegove komponente v prostorski bazi bomo dobili s konjugiranjem s prehodno matriko, ki določa orientacijo telesne baze glede na prostorsko bazo v danem trenutku. V našem primeru je $Q(t) = R(\vec{k}, \omega t) R(\vec{j}, -\alpha)$, kar nam da

$$Q(t) = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \omega t & -\sin \omega t & -\sin \alpha \cos \omega t \\ \cos \alpha \sin \omega t & \cos \omega t & -\sin \alpha \sin \omega t \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Za vztrajnostni tenzor v prostorski bazi tako velja

$$J'_*(t) = Q(t) J_* Q(t)^T = J \begin{bmatrix} 1 + \sin^2 \alpha \cos^2 \omega t & \sin^2 \alpha \cos \omega t \sin \omega t & -\sin \alpha \cos \alpha \cos \omega t \\ \sin^2 \alpha \cos \omega t \sin \omega t & 1 + \sin^2 \alpha \sin^2 \omega t & -\sin \alpha \cos \alpha \sin \omega t \\ -\sin \alpha \cos \alpha \cos \omega t & -\sin \alpha \cos \alpha \sin \omega t & 1 + \cos^2 \alpha \end{bmatrix},$$

kjer je $J = J_{xx} = \frac{1}{4} m R^2$. Vidimo, da je vztrajnostni tenzor v telesni bazi konstanten, v prostorski bazi pa časovno odvisen.

(b) V telesni bazi se hitrost vrtenja izraža z rotacijskim vektorjem

$$\vec{\omega}(t) = \omega(\sin \alpha \vec{e}_1 + \cos \alpha \vec{e}_3),$$

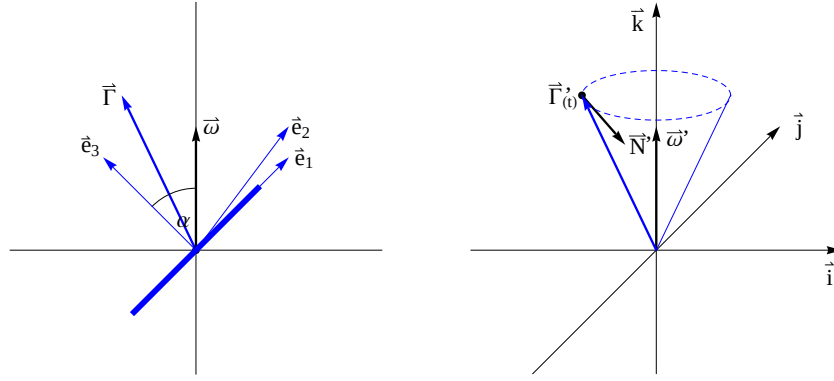
zato je vrtilna količina diska enaka

$$\vec{\Gamma}(t) = J_* \cdot \vec{\omega}(t) = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & 2J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega \sin \alpha \\ 0 \\ \omega \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \omega \sin \alpha \\ 0 \\ 2J \omega \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Vektor kotne hitrosti vrtenja pa je enak $\vec{\omega}'(t) = \omega \vec{k}$, od koder sledi

$$\vec{\Gamma}'(t) = J'_* \cdot \vec{\omega}'(t) = J \omega \begin{bmatrix} \sin \alpha \cos \alpha \cos \omega t \\ \sin \alpha \cos \alpha \sin \omega t \\ 1 + \cos^2 \alpha \end{bmatrix}.$$

Vektor vrtilne količine v prostorski bazi lahko izračunamo tudi s formulo $\vec{\Gamma}'(t) = Q(t) \cdot \vec{\Gamma}(t)$.



Vidimo, da je vektor vrtilne količine konstanten v telesni bazi, medtem ko v prostorski bazi precesira okoli navpične osi. V nadaljevanju bomo izračunali navor, ki je za to potreben.

(c) Dinamiko vrtenja togega telesa okrog dane fiksne točke 0 določa zakon o vrtilni količini

$$\frac{d\vec{\Gamma}'_0}{dt} = \vec{N}'_0.$$

V telesni bazi se ta zakon zapiše v obliki

$$J_0 \cdot \vec{\omega} + \vec{\omega} \times J_0 \cdot \vec{\omega} = \vec{N}_0,$$

če pa je J_0 diagonalna matrika z lastnimi vrednostmi J_1 , J_2 in J_3 , pa pridemo do Eulerjevih dinamičnih enačb:

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (J_2 - J_3) &= N_1, \\ J_2 \dot{\omega}_2 - \omega_3 \omega_1 (J_3 - J_1) &= N_2, \\ J_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (J_1 - J_2) &= N_3. \end{aligned}$$

V našem primeru je $\vec{\omega} = (\omega \sin \alpha, 0, \omega \cos \alpha)$, $\dot{\vec{\omega}} = 0$, $J_1 = J_2 = \frac{1}{4}mR^2$ ter $J_3 = \frac{1}{2}mR^2$. Od tod dobimo $N_1 = N_3 = 0$ in $N_2 = -\frac{1}{4}mR^2\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha$ in:

$$\begin{aligned} \vec{N}(t) &= (0, N_2, 0), \\ \vec{N}'(t) &= Q(t) \cdot \vec{N}(t) = N_2(-\sin \omega t, \cos \omega t, 0). \end{aligned}$$

Navor je ves čas pravokoten na vrtilno količino.

Opomba: Eulerjeve enačbe nam povedo, kako se med vrtenjem spreminja rotacijski vektor $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$. Če hočemo vedeti, kakšna je orientacija telesa $Q(t)$, pa moramo rešiti še sistem

$$\dot{Q}(t) = Q(t)W(t),$$

kjer je

$$W(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix}$$

antisimetrična matrika, ki pripada rotacijskemu vektorju $\vec{\omega}(t)$.

Analitično je to enačbo v splošnem težko reševati, za vajo pa lahko preverimo, da naša rotacija Q reši to enačbo. Iz formul

$$Q(t) = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \omega t & -\sin \omega t & -\sin \alpha \cos \omega t \\ \cos \alpha \sin \omega t & \cos \omega t & -\sin \alpha \sin \omega t \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad W(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \cos \alpha & 0 \\ \omega \cos \alpha & 0 & -\omega \sin \alpha \\ 0 & \omega \sin \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

dobimo

$$Q(t)W(t) = \begin{bmatrix} -\omega \cos \alpha \sin \omega t & -\omega \cos \omega t & \omega \sin \alpha \sin \omega t \\ \omega \cos \alpha \cos \omega t & -\omega \sin \omega t & -\omega \sin \alpha \cos \omega t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Po drugi strani pa je

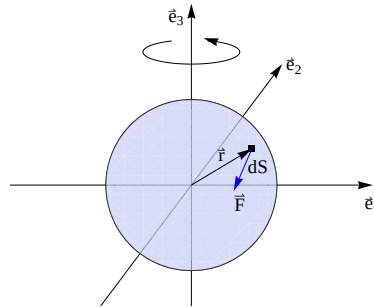
$$\dot{Q}(t) = \begin{bmatrix} -\omega \cos \alpha \sin \omega t & -\omega \cos \omega t & \omega \sin \alpha \sin \omega t \\ \omega \cos \alpha \cos \omega t & -\omega \sin \omega t & -\omega \sin \alpha \cos \omega t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kar smo želeli pokazati. $\square$

- (4) Okrogla plošča z maso m in polmerom R se vrti okoli osi, ki leži v ravnini plošče in gre skozi njeno središče. Na ploščo deluje zračni upor, katerega površinska gostota je sorazmerna kvadratu hitrosti.

- (a) Izračunaj navor zračnega upora v odvisnosti od hitrosti vrtenja.
(b) Izračunaj, kako se hitrost vrtenja plošče spreminja v odvisnosti od časa, če ima plošča na začetku kotno hitrost ω_0 .

Rešitev: (a) Ploščo na začetku zavrtimo tako, da ima kotno hitrost ω_0 , nato pa jo pustimo, da se postopoma vrti čedalje počasneje zaradi zračnega upora.



Gostota sile zračnega upora (ki deluje na ploščo v dani točki) je enaka

$$\vec{F} = -k|\vec{v}|^2 \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = -k|\vec{v}|\vec{v}.$$

Ta sila je odvisna od lege na plošči. Točke, ki so dlje od osi vrtenja, imajo večjo hitrost, zato bo tam sila upora največja, medtem ko pri točkah na osi vrtenja zračnega upora ni. Hitrost točke $\vec{r} = (x, y, z)$ pri vrtenju okoli osi z je enaka

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = (0, 0, \omega) \times (x, y, z) = (-\omega y, \omega x, 0).$$

Zanimajo nas samo točke na plošči $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq R^2, y = 0\}$, katerih hitrost pa je enaka

$$\vec{v} = (0, \omega x, 0).$$

Gostoto sile lahko torej zapišemo v obliki

$$\vec{F} = -k\omega^2 x|x|\vec{e}_2.$$

Navor, ki ga ustvari sila na majhnem delčku plošče je enak

$$d\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} dS = (x, y, z) \times (0, -k\omega^2 x|x|, 0) dS = (k\omega^2 x|x|z, 0, -k\omega^2 x^2|x|) dS.$$

Skupni navor sile zračnega upora dobimo z integriranjem teh prispevkov po celi plošči. Sledi

$$\vec{N} = \iint_S d\vec{N} = \iint_S \begin{bmatrix} k\omega^2 x|x|z \\ 0 \\ -k\omega^2 x^2|x| \end{bmatrix} dS.$$

Vidimo, da je $N_2 = 0$, iz simetrijskih razlogov pa sledi tudi $N_1 = 0$. Ostane nam še:

$$\begin{aligned} N_3 &= - \iint_S k\omega^2 x^2|x|, \\ &= -k\omega^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^3 \cos^2 \phi |\cos \phi| r dr, \\ &= -\frac{2k\omega^2 R^5}{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \phi d\phi, \quad u = \sin \phi, \\ &= -\frac{2k\omega^2 R^5}{5} \int_{-1}^1 (1 - u^2) du, \\ &= -\frac{8}{15} k\omega^2 R^5. \end{aligned}$$

Torej je navor na ploščo, gledano v telesni bazi, enak $\vec{N} = -\frac{8}{15} k\omega^2 R^5 \vec{e}_3$.

(b) Hitrost vrtenja plošče lahko v telesni bazi zapišemo v obliki $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{e}_3$, vztrajnostni tenzor pa je

$$J_* = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}mR^2 \end{bmatrix}.$$

Eulerjeva enačba:

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (J_2 - J_3) &= N_1, \\ J_2 \dot{\omega}_2 - \omega_3 \omega_1 (J_3 - J_1) &= N_2, \\ J_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (J_1 - J_2) &= N_3, \end{aligned}$$

se poenostavi v diferencialno enačbo z ločljivimi spremenljivkami

$$J_3 \dot{\omega} = -\frac{8}{15} k\omega^2 R^5$$

za $\omega = \omega(t)$. Če pišemo $\lambda = -\frac{8kR^5}{15J_3}$, je:

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{\omega^2} &= \lambda dt, \\ -\frac{1}{\omega} \Big|_0^t &= \lambda t, \\ -\frac{1}{\omega(t)} + \frac{1}{\omega_0} &= \lambda t.\end{aligned}$$

Od tod dobimo

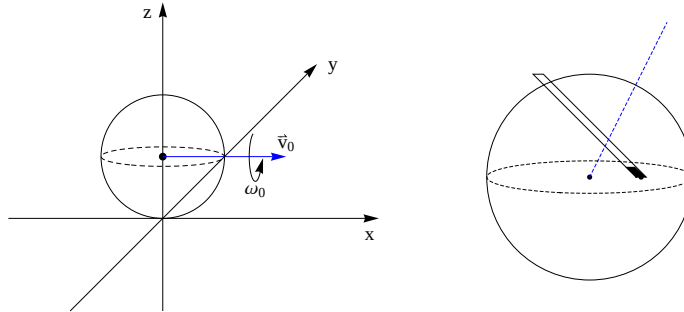
$$\omega(t) = \frac{\omega_0}{1 - \lambda\omega_0 t} = \frac{\omega_0}{1 + \frac{32kR^3\omega_0}{15m}t}.$$

Po dovolj dolgem času se plošča praktično neha vrteti. □

- (5) Na hrapavi vodoravni podlagi miruje homogena krogla z maso m in s polmerom R . Kroglo udarimo tako, da je v začetnem trenutku $\vec{r}'_*(0) = (v_0, 0, 0)$ in $\vec{\omega}'(0) = (\omega_0, 0, 0)$. Krogla nekaj časa drsi po podlagi, nato pa se začne kotaliti.

- (a) Pokaži, da je med drsenjem krogle sila trenja konstantna.
(b) Izračunaj trajektorijo središča krogle med drsenjem.

Rešitev: Kroglo udarimo tako, da ima na začetku poleg translacijske hitrosti težišča še kotno hitrost okoli smeri začetne hitrosti. Pri teh začetnih pogojih bo krogla nekaj časa drsela po podlagi tako, da bo njen tir parabola, nato pa se bo začela kotaliti po premici.



Dinamiko krogle bomo razstavili na gibanje težišča in pa na vrtenje krogle okrog težišča. Tokrat bo gibanje krogle lažje opisati v prostorski bazi. Gibanje določata Newtonov zakon in pa zakon o vrtilni količini:

$$\begin{aligned}m\ddot{\vec{r}}'_* &= \vec{F}', \\ J'_* \cdot \dot{\vec{\omega}}' &= \vec{N}'.\end{aligned}$$

Med drsenjem delujejo na kroglo sila podlage, sila teže in sila trenja:

$$\begin{aligned}\vec{F}'_g &= -mg\vec{k}, \\ \vec{F}'_n &= mg\vec{k}, \\ \vec{F}'_{tr} &= -\mu mg \frac{\vec{v}'_{dot}}{|\vec{v}'_{dot}|},\end{aligned}$$

kjer je μ koeficient trenja med kroglo in podlago in $\vec{v}_{dot}' = \dot{\vec{r}}_*' + \vec{\omega}' \times (-R\vec{k})$ hitrost dotikališča krogle in podlage. K navoru glede na težišče krogle prispeva le sila trenja, in sicer je navor sile trenja enak $\vec{N}' = (-R\vec{k}) \times \vec{F}_{tr}'$. Vztrajnostni tenzor krogle je večkratnik identitete $J_*' = J\text{Id}$, kjer je $J = \frac{2}{5}mR^2$, kar nam da:

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}}_*' &= \vec{F}_{tr}', \\ J\dot{\vec{\omega}}' &= (-R\vec{k}) \times \vec{F}_{tr}'. \end{aligned}$$

Naš cilj je, da izračunamo, kako se giblje težišče krogle $\vec{r}_*(t) = (x'(t), y'(t), R)$ in kako se spreminja kotna hitrost krogle $\vec{\omega}'(t)$. Začetni pogoji so:

$$\begin{aligned} \vec{r}_*(0) &= (0, 0, R), \\ \dot{\vec{r}}_*(0) &= (v_0, 0, 0), \\ \vec{\omega}'(0) &= (\omega_0, 0, 0). \end{aligned}$$

(a) Najprej bomo pokazali, da med drsenjem sila trenja ves čas kaže v isto smer. Iz enakosti:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{F}}_{tr}' &= -\mu mg \left(\frac{1}{|\vec{v}_{dot}'|} \right) \vec{v}_{dot}' - \frac{\mu mg}{|\vec{v}_{dot}'|} (\ddot{\vec{r}}_*' + \dot{\vec{\omega}}' \times (-R\vec{k})), \\ &= -\mu mg \left(\frac{1}{|\vec{v}_{dot}'|} \right) \vec{v}_{dot}' - \frac{\mu mg}{|\vec{v}_{dot}'|} \left(\frac{1}{m} \vec{F}_{tr}' + \frac{R^2}{J} (\vec{k} \times \vec{F}_{tr}') \times \vec{k} \right), \\ &= -\mu mg \left(\frac{1}{|\vec{v}_{dot}'|} \right) \vec{v}_{dot}' - \frac{\mu mg}{|\vec{v}_{dot}'|} \left(\frac{1}{m} + \frac{R^2}{J} \right) \vec{F}_{tr}' \end{aligned}$$

sledi, da je $\dot{\vec{F}}_{tr}' \parallel \vec{F}_{tr}'$. Od tod sklepamo, da je $\vec{F}_{tr}'(t) \parallel \vec{F}_{tr}'(0)$, ker pa je velikost sile trenja konstantna, pa od tod sledi

$$\vec{F}_{tr}'(t) = \vec{F}_{tr}'(0).$$

(b) V začetnem trenutku je hitrost dotikališča enaka

$$\vec{v}_{dot}' = (v_0, 0, 0) + (\omega_0, 0, 0) \times (0, 0, -R) = (v_0, \omega_0 R, 0),$$

kar pomeni, da med drsenjem na kroglo deluje sila

$$\vec{F}_{tr}' = -\mu mg \frac{(v_0, \omega_0 R, 0)}{\sqrt{v_0^2 + \omega_0^2 R^2}} = -m(a_x, a_y, 0),$$

kjer smo označili:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\mu g v_0}{\sqrt{v_0^2 + \omega_0^2 R^2}}, \\ a_y &= \frac{\mu g \omega_0 R}{\sqrt{v_0^2 + \omega_0^2 R^2}}. \end{aligned}$$

Med drsenjem krogle po podlagi veljata enačbi:

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}}_*' &= -ma_x \vec{i} - ma_y \vec{j}, \\ J\dot{\vec{\omega}}' &= (-R\vec{k}) \times (-ma_x \vec{i} - ma_y \vec{j}) = -mRa_y \vec{i} + mRa_x \vec{j}. \end{aligned}$$

Z upoštevanjem začetnih pogojev dobimo iz prve enačbe:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}_*(t) &= (-a_x, -a_y, 0), \\ \dot{\vec{r}}_*(t) &= (v_0 - a_x t, -a_y t, 0), \\ \vec{r}_*(t) &= \left(v_0 t - \frac{1}{2} a_x t^2, -\frac{1}{2} a_y t^2, R \right),\end{aligned}$$

iz druge pa:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{\omega}}'(t) &= \left(-\frac{5a_y}{2R}, \frac{5a_x}{2R}, 0 \right), \\ \vec{\omega}'(t) &= \left(\omega_0 - \frac{5a_y t}{2R}, \frac{5a_x t}{2R}, 0 \right).\end{aligned}$$

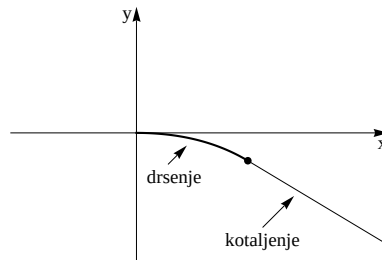
Krogla se bo začela kotaliti, ko bo $\vec{v}'_{dot} = \dot{\vec{r}}_* + \vec{\omega}' \times (-R\vec{k}) = 0$. Tako dobimo enačbo:

$$\begin{aligned}(v_0 - a_x t, -a_y t, 0) + \left(\omega_0 - \frac{5a_y t}{2R}, \frac{5a_x t}{2R}, 0 \right) \times (0, 0, -R) &= 0, \\ (v_0 - \frac{7}{2} a_x t, \omega_0 R - \frac{7}{2} a_y t, 0) &= 0,\end{aligned}$$

ki ima rešitev $t_0 = \frac{2v_0}{7a_x}$. Ob tem času bosta hitrost in kotna hitrost krogle:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}_*(t_0) &= \left(\frac{5}{7} v_0, -\frac{2}{7} \omega_0 R, 0 \right), \\ \vec{\omega}'(t_0) &= \left(\frac{2}{7} \omega_0, \frac{5v_0}{7R}, \omega_0 \right).\end{aligned}$$

Za čase $t < t_0$ krogla drsi po paraboli, od časa t_0 dalje pa se kotali po premici s konstantno hitrostjo težišča in s konstantno kotno hitrostjo.



□