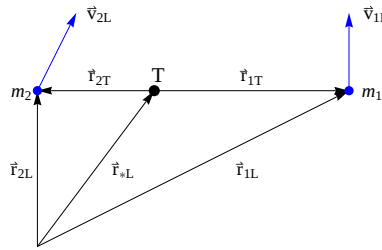


Mehanika 1

Sistem materialnih točk

- (1) Opiši dinamiko zaprtega sistema točk z masama m_1 in m_2 , med katerima deluje sila, ki je odvisna samo od razdalje med točkama in kaže v smeri zveznice med točkama.

Rešitev: Pri obravnavi sistema materialnih točk imamo na razpolago dva koordinatna sistema. Sistemu, v katerem ponavadi opazujemo sistem točk in je ponavadi inercialen, rečemo laboratorijski koordinatni sistem in ga označimo z LKS. Najbolj nas seveda zanima opis dogajanja v tem sistemu, računsko pa je gibanje točk pogosto lažje opisati v težiščnem koordinatnem sistemu TKS. To je sistem, ki se giblje hkrati z masnim središčem sistema točk in je orientiran enako kot LKS. Dogovorimo se, da bomo vektorjem glede na LKS dodali indeks L, glede na TKS pa indeks T.



Gibanje sistema dveh točk lahko razdelimo na gibanje težišča in pa na relativno gibanje prve točke glede na drugo točko. Naj bosta $\vec{r}_{1L}$ in $\vec{r}_{2L}$ položaja obeh točk, gledano v LKS. Položaj težišča sistema točk je v LKS potem enak

$$\vec{r}_{*L} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_{1L} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_{2L},$$

njegova hitrost pa je

$$\vec{v}_{*L} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1L} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_{2L}.$$

Če opazujemo položaj prve točke v TKS, pa je

$$\vec{r}_{1T} = \vec{r}_{1L} - \vec{r}_{*L} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{r}_{1L} - \vec{r}_{2L}).$$

Označimo sedaj z $\vec{r} = \vec{r}_{1L} - \vec{r}_{2L}$ relativni položaj prve točke glede na drugo točko. Potem lahko položaja obeh točk glede na težišče izrazimo z vektorjema:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{1T} &= \vec{r}_{1L} - \vec{r}_{*L} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \\ \vec{r}_{2T} &= \vec{r}_{2L} - \vec{r}_{*L} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \end{aligned}$$

Od tod sledi:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{1L} &= \vec{r}_{*L} + \vec{r}_{1T} = \vec{r}_{*L} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \\ \vec{r}_{2L} &= \vec{r}_{*L} + \vec{r}_{2T} = \vec{r}_{*L} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \end{aligned}$$

Položaj točk smo torej izrazili s položajem težišča in relativnim položajem.

Privzeli smo, da na točki ne delujejo nobene zunanje sile, zato se skupna gibalna količina sistema ohranja, kar pa pomeni, da se težišče sistema giblje po premici s konstantno hitrostjo s predpisom

$$\vec{r}_{*L}(t) = \vec{r}_{*L}(0) + \vec{v}_{*L}(0)t.$$

Za določitev gibanja obeh točk je torej dovolj izračunati, kako se prva točka giblje glede na drugo točko. Naš cilj bo sedaj, da nekaj povemo o funkciji $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Diferencialno enačbo, ki določa $\vec{r}(t)$, bomo dobili iz 2. Newtonovega zakona. Privzeli smo, da točki delujeta ena na drugo s silo, ki je odvisna samo od medsebojne razdalje in ki kaže v smeri zveznice med obema točkama. Iz 3. Newtonovega zakona pa nato sledi še, da sta si te dve sili nasprotno enaki. Tako dobimo:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_{1L} &= F(r) \frac{\vec{r}}{r}, \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_{2L} &= -F(r) \frac{\vec{r}}{r}. \end{aligned}$$

Če ti dve enačbi delimo z ustreznima masama in nato odštejemo, pridemo do enačbe:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_{1L} - \ddot{\vec{r}}_{2L} &= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) F(r) \frac{\vec{r}}{r}, \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} &= F(r) \frac{\vec{r}}{r}. \end{aligned}$$

Koeficientu $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ rečemo reducirana masa sistema točk. Če je medsebojna sila F dana s potencialom V , smo dinamiko sistema dveh točk tako prevedli na gibanje točke z maso μ pod vplivom centralne sile F . $\square$

- (2) Materialni točki z masama m_1 in m_2 se gibljeta pod vplivom gravitacijske sile $F(r) = -\frac{\gamma}{r^2}$. Privzemimo, da se točka z maso m_1 giblje proti točki z maso m_2 z velike oddaljenosti s hitrostjo v_∞ in z vpadnim parametrom d . Izračunaj kot med začetno in končno relativno hitrostjo prve točke glede na drugo točko.

Rešitev: Privzeli bomo, da se prva točka približuje drugi točki z velike oddaljenosti s hitrostjo v_∞ po premici, ki je od druge točke oddaljena za d . Matematično lahko to strnemo v naslednje začetne pogoje:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) &= -\infty, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) &= d, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \dot{x}(t) &= -v_\infty, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \dot{y}(t) &= 0. \end{aligned}$$

Iz našega znanja o gibanju točke v polju centralne sile vemo, da velja

$$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = E,$$

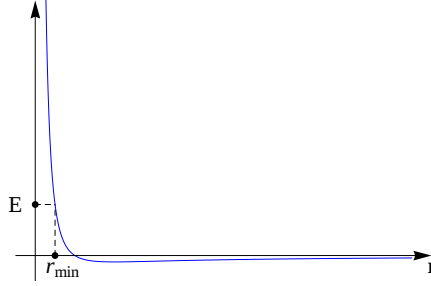
kjer je $V_{\text{eff}}(r) = -\frac{\gamma}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$. Konstanti gibanja E in l lahko izluščimo iz 'začetnih pogojev' pri $t \rightarrow -\infty$. V tej limiti ima namreč točka samo kinetično energijo, njena hitrost pa je

$-v_\infty \vec{i}$. Od tod dobimo, da je:

$$E = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2,$$

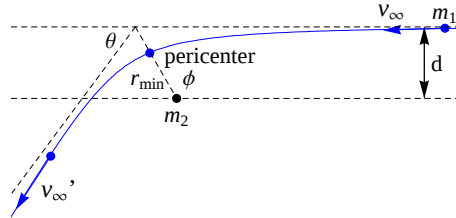
$$l = \mu d v_\infty.$$

Če analiziramo graf efektivnega potenciala, vidimo, da bo gibanje prve točke glede na drugo točko neomejeno.



Na začetku se bosta obe točki približevali ena drugi, v pericentru bo njuna medsebojna oddaljenost minimalna, nato pa se bosta začeli ena od druge oddaljevati. Iz splošne teorije o gibanju točke v polju centralne sile vemo še, da bo tir prve točke simetričen glede na pericenter.

V nadaljevanju bo naš cilj izračunati kot med začetno in končno relativno hitrostjo prve točke glede na drugo točko.



Zaradi simetričnosti tira je

$$\theta = 2\phi - \pi,$$

kar pomeni, da je dovolj izračunati kot ϕ . Pri tem si bomo pomagali s formulo, ki nam pove, kakšen polarni kot opiše točka, ki se giblje po tiru od točke na tiru, ki ustreza razdalji r_1 , do točke na tiru, ki ustreza razdalji r_2 od centra sile

$$\Delta\phi = \text{sgn}(\dot{r}) \int_{r_1}^{r_2} \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2\mu(E - V_{\text{eff}}(r))}}.$$

V našem primeru bomo vzeli $r_1 = \infty$, $r_2 = r_{\min}$, ker se točka na začetku približuje centru sile, pa je $\text{sgn}(\dot{r}) = -1$. Računajmo

$$\phi = - \int_{\infty}^{r_{\min}} \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2\mu(E - V_{\text{eff}}(r))}} = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{l dr}{r^2 \sqrt{E + \frac{\gamma}{r} - \frac{l^2}{2\mu r^2}}}.$$

Uvedimo sedaj novo spremenljivko $u = \frac{1}{r}$. Sledi $du = -\frac{dr}{r^2}$ in

$$\phi = -\frac{1}{\sqrt{2\mu}} \int_{\frac{1}{r_{\min}}}^0 \frac{l du}{\sqrt{E + \gamma u - \frac{l^2}{2\mu} u^2}} = \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_0^{\frac{1}{r_{\min}}} \frac{du}{\sqrt{E + \gamma u - \frac{l^2}{2\mu} u^2}}.$$

Če upoštevamo še, da za $a < 0$ in $D = b^2 - 4ac > 0$ velja

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{D}} \right) + C,$$

dobimo:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_0^{\frac{1}{r_{\min}}} \frac{du}{\sqrt{E + \gamma u - \frac{l^2}{2\mu} u^2}} = -\frac{l}{\sqrt{2\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{l^2}{2\mu}}} \arcsin \left(\frac{-\frac{l^2}{\mu} u + \gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \frac{2El^2}{\mu}}} \right) \Bigg|_0^{\frac{1}{r_{\min}}}, \\ &= \arcsin \left(\frac{\frac{l^2}{\mu} u - \gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \frac{2El^2}{\mu}}} \right) \Bigg|_0^{\frac{1}{r_{\min}}}. \end{aligned}$$

Zveza med energijo točke in minimalno razdaljo je enaka $E = V_{\text{eff}}(r_{\min}) = -\frac{\gamma}{r_{\min}} + \frac{l^2}{2\mu r_{\min}^2}$. Od tod lahko izpeljemo, da je izraz v zgornjem oklepaju pri $u = \frac{1}{r_{\min}}$ enak 1. Sledi

$$\phi = \arcsin 1 - \arcsin \left(\frac{-\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \frac{2El^2}{\mu}}} \right) = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\gamma^2}}}.$$

Če izrazimo rezultat v odvisnosti od začetne hitrosti v_{∞} in vpadnega parametra d , dobimo

$$\frac{2El^2}{\mu} = \frac{\mu v_{\infty}^2 (\mu d v_{\infty})^2}{\mu} = (\mu d v_{\infty}^2)^2$$

oziroma

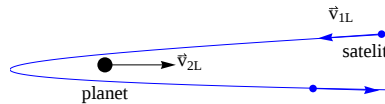
$$\phi = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu d v_{\infty}^2}{\gamma} \right)^2}}.$$

Od tod sledi

$$\theta = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu d v_{\infty}^2}{\gamma} \right)^2}}.$$

Če je parameter $\frac{\mu d v_{\infty}^2}{\gamma}$ velik, je $\theta \approx 0$, kar pomeni, da se tir točke le malo ukrivi. Če pa je parameter $\frac{\mu d v_{\infty}^2}{\gamma}$ majhen, je $\theta \approx \pi$, kar pomeni, da prva točka zaobkroži drugo točko in se začne vračati nazaj, od koder je prišla.

Ta pojav se uporablja za spreminjanje smeri leta in pa pospeševanje satelitov.



Denimo, da se satelit in planet premikata s hitrostima $\vec{v}_{1L}$ in $\vec{v}_{2L}$, ki kažeta v približno nasprotnih smereh. Privzeli bomo, da je masa satelita zanemarljiva v primerjavi z maso planeta, kar pomeni, da je $\vec{v}_{2L} \approx \vec{v}_{*L}$. Za relativno hitrost satelita glede na planet potem velja

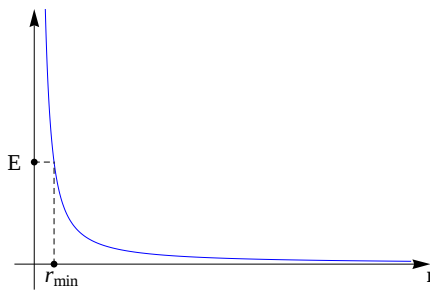
$$\vec{v}(\text{začetna}) \approx \vec{v}_{1L}(\text{začetna}) - \vec{v}_{*L}.$$

Ko satelit obkroži planet, se začne od njega oddaljevati z enako relativno hitrostjo, kar pomeni, da je hitrost satelita enaka

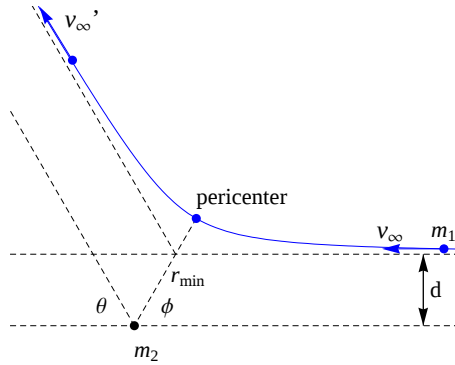
$$\vec{v}_{1L}(\text{končna}) \approx \vec{v}_{*L} - \vec{v}(\text{začetna}) = -\vec{v}_{1L} + 2\vec{v}_{2L}.$$

Kot vidimo, se satelitu obrne smer hitrosti, hitrost pa se poveča za dvakratnik hitrosti planeta.

Opomba: Podobno obravnavamo tudi primer električne odbojne sile $F(r) = \frac{\alpha}{r^2}$ za $\alpha > 0$.



Relativni tir druge točke glede na prvo bo spet hiperbola, le da se bo tokrat prva točka ukrivila v drugo smer.



Zaradi simetričnosti tira je sedaj

$$\theta = \pi - 2\phi,$$

kjer je

$$\phi = - \int_{\infty}^{r_{\min}} \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2\mu(E - V_{\text{eff}}(r))}} = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{l dr}{r^2 \sqrt{E - \frac{\alpha}{r} - \frac{l^2}{2\mu r^2}}}.$$

Če uvedemo novo spremenljivko $u = \frac{1}{r}$, sledi $du = -\frac{dr}{r^2}$ in

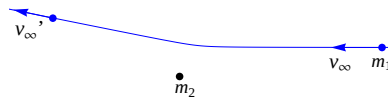
$$\phi = - \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \int_{\frac{1}{r_{\min}}}^0 \frac{l du}{\sqrt{E - \alpha u - \frac{l^2}{2\mu} u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \int_0^{\frac{1}{r_{\min}}} \frac{l du}{\sqrt{E - \alpha u - \frac{l^2}{2\mu} u^2}}.$$

Na podoben način kot prej lahko izračunamo, da je

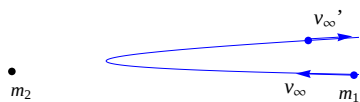
$$\phi = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu d v_{\infty}^2}{\alpha}\right)^2}}.$$

Poglejmo si dva limitna primera.

1) Če je parameter $\frac{\mu d v_{\infty}^2}{\alpha}$ velik, je $\phi \approx \frac{\pi}{2}$ in $\theta \approx 0$. V primeru, ko je torej vpadni parameter d velik, ali pa medsebojna sila (ki je odvisna od α) majhna, se tir točke le malo ukrivi.



2) Če pa je parameter $\frac{\mu d v_{\infty}^2}{\alpha}$ majhen, je $\phi \approx 0$ in $\theta \approx \pi$. V primeru, ko bi morali točki skoraj čelno trčiti, ali pa je medsebojna sila zelo velika, se prva točka odbije nazaj.



□