

## Analiza 1

1. izpit

26. 6. 2015

### 1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrater čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrater prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Za vsako funkcijo  $f$ , ki je odvedljiva v točki  $a$ , obstaja desna limita  $\lim_{x \downarrow a} f(x)$ .



Zvezna funkcija  $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  je enakomerno zvezna.



Množica  $A = (-\infty, 2015)$  vsebuje svojo natančno zgornjo mejo.



Vsota potenčne vrste je funkcija, ki je zvezna povsod, kjer je definirana.



Če je limita funkcijskega zaporedja  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , zaporedje  $f_n$  enakomerno konvergira na  $\mathbb{R}$ .



Vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{s+1}}$  absolutno konvergira natanko tedaj, ko velja  $s > 0$ .



Množici  $\mathbb{R}$  in  $(0, 1]$  sta ekvipolentni.



Obstaja neomejena kompaktna množica  $A \subset \mathbb{R}^2$ .



Vsaka zvezna funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ima primitivno funkcijo  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .



Če zaporedje  $a_n$  za vsak  $n$  zadošča pogoju  $0 < a_n < 1$ , potem premore tako stekališče  $s$ , da je  $0 < s < 1$ .

## 2. naloga

S pomočjo prvega odvoda skiciraj graf funkcije

$$f(x) = (x^2 + 1)e^{1/x}.$$

## 3. naloga

a) Za  $a, b > 0$  izračunaj ploščino lika, ki ga omejuje elipsa z enačbo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

b) Izračunaj prostornino telesa, ki ga podajata zvezi

$$4x^2 + y^2 \leq \frac{4\sqrt{1+z^2}}{z}$$

in  $1 \leq z \leq 2$ .

## 4. naloga

Ugotovi, ali je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 1} \right)$$

konvergentna?

## 5. naloga

V metričnem prostoru  $C[-1, 1]$  z običajno metriko  $d_{\infty}$  je dana podmnožica

$$A = \{f \in C[-1, 1] \mid f(-1) = f(1), \forall x \in [-1, 1] : |f(x)| \leq \frac{1}{4}\},$$

ki jo opremimo z inducirano metriko. Preslikavo  $Q : A \rightarrow C[-1, 1]$  definiramo s predpisom

$$Q(f)(x) = (f(x))^5 + \frac{x^2}{8}.$$

a) Preveri, da je zaloga vrednosti preslikave  $Q$  vsebovana v množici  $A$ .

b) Dokaži, da je  $(A, d_{\infty})$  poln metrični prostor.

c) Dokaži, da obstaja natanko en  $f \in A$ , da velja

$$8f(x) = 8f(x)^5 + x^2$$

za vsak  $x \in [-1, 1]$ .