

## 1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ima limito  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  v točki  $a \in \mathbb{R}$  natanko takrat, ko obstajata  $\lim_{x \uparrow a} f(x)$  in  $\lim_{x \downarrow a} f(x)$ .



Vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira natanko takrat, ko je  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$ .



Slika zvezne funkcije  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  je omejen odprt interval.



Funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je zvezna v točki  $a \in \mathbb{R}$  natanko takrat, ko obstaja zaporedje števil  $(a_n)$ , ki konvergira k  $a$  in za katero velja  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$ .



Naj za vrsto s pozitivnimi členi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  velja  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ . Potem vrsta divergira.



Člene vrste  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  lahko preuredimo tako, da bo imela dobljena vrsta vsoto 0.



Hiperbolični sinus  $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je bijektivna preslikava.



Za vsak  $x \in \mathbb{R}$  velja  $\arcsin(\sin x) = x$ .



Če vrsta s pozitivnimi členi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira, potem konvergira tudi vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ .



Naj za funkcijo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  velja  $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$  za vsaka  $x, y \in \mathbb{R}$ . Potem je  $f$  enakomerno zvezna na  $\mathbb{R}$ .

### Problem 2

Dana je funkcija s predpisom

$$f(x) = e^{2 \ln x - \ln^2 x}.$$

- a) Določi definicijsko območje  $D_f$ , zalogo vrednosti  $Z_f$  funkcije  $f$  in njeno obnašanje na robovih  $D_f$  ter približno skiciraj graf funkcije  $f$ .  
b) Določi tak  $a \in \mathbb{R}$ , da bo  $f : [a, \infty) \rightarrow Z_f$  bijektivna funkcija in izračunaj inverzno funkcijo.

### Problem 3

- a) Izračunaj limito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 3}{x^3 + 1} \right)^{x - x^3}.$$

- b) Naj bo  $f : (-\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}) \rightarrow \mathbb{R}$  taka funkcija, da je

$$f(x) = \frac{(1 - \cos^4 x)^2}{x^3 \sin 5x}$$

za  $x \neq 0$ . Določi vrednost  $f(0)$  tako, da bo funkcija  $f$  zvezna.

### Problem 4

- a) Dokaži, da vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \left( -\frac{1}{n} \right)$$

absolutno konvergira.

- b) Za katere  $a > 0$  konvergira vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 a^n}{((2n+5)!!)^2}?$$

### Problem 5

- a) Obravnavaj konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} + a\sqrt{n+1})$$

za  $a \in \mathbb{R}$ .

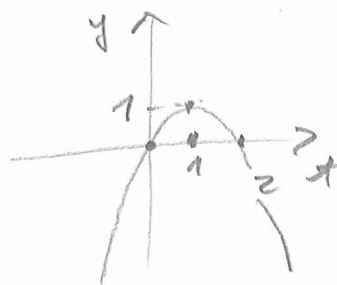
- b) Obravnavaj konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b\sqrt{n} + c\sqrt{n+1})$$

za  $b, c \in \mathbb{R}$ .

② a)  $\mathcal{D}_f = (0, \infty)$

$y = 2x - x^2$



⑥

$\Rightarrow \{2\ln x - \ln^2 x; x > 0\} = (-\infty, 1]$

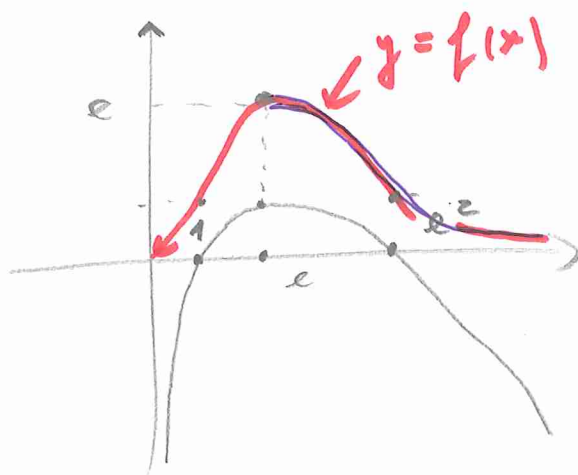
$\Rightarrow \mathcal{Z}_f = (0, e]$

⑥

$y = 2\ln x - \ln^2 x$

$\lim_{x \rightarrow 0} y = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} y$

④



b)  $\alpha = e$  ②  $x \geq e$

$y = e^{2\ln x - \ln^2 x} \Rightarrow \ln y = 2\ln x - \ln^2 x \Rightarrow$

$x^2 - 2x + \ln y = 0$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\ln y}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 - \ln y}$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = e^{1 + \sqrt{1 - \ln x}}$

⑥

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} \quad a) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 3}{x^3 + 1} \right)^{x - x^3} = \quad \begin{matrix} -2 \\ \nearrow \end{matrix} \\
 & = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \underbrace{1 + \frac{2}{x^3 + 1}}_{\downarrow e} \right]^{\frac{x^3 + 1}{2} \cdot \frac{2(x - x^3)}{x^3 + 1}} = e^{-2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 x)^2 (1 + \cos^2 x)^2}{x^3 \sin 5x} = \quad \begin{matrix} 2 \\ \nearrow \end{matrix} \\
 & = 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x}{x^3 \sin 5x} = \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

④

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} |n^2 \underbrace{\left[ \sin\left(-\frac{1}{n}\right) \right]^n}_{-\sin \frac{1}{n}}| =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \frac{1}{n}$$

$x \in (0, 1)$ :

$$\sin x \leq x \Rightarrow \sin^n \frac{1}{n} \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{n^n}$$

$$\Rightarrow a_n = n^2 \cdot \sin^n \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^{n-2}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konvergira}$$

$$\text{Za } n \geq 4: a_n \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergira}$$

b)  $a_n = \frac{(n!)^2 a_n}{((2n+5)!!!)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow D_n = \frac{((n+1)!)^2 \cdot a_{n+1}}{((2n+7)!!!)^2 \cdot (n!)^2} = \frac{((2n+5)!!!)^2}{((2n+7)!!!)^2} \rightarrow \frac{1}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2 a_n}{(2n+7)^2} = \left( \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{7}{n}} \right)^2 a_n = \frac{9}{4}$$

•  $\text{Če je } a < 4, \text{ konvergira}$

•  $\text{Če je } a > 4, \text{ divergira}$

•  $a = 4: R_n = n \left( \frac{1}{D_n} - 1 \right) = n \left( \frac{4n^2 + 28n + 49 - 4n^2 - 8n - 4}{4(n+1)^2} \right)$

$$= \frac{20n^2 + 45n}{4n^2 + 8n + 4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{20}{4} = 5 > 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \text{konvergira}$

③

5) a) 15  
 a) 1)  $\bar{C}_e$  je  $a \geq 0 \Rightarrow \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$   
 $\Rightarrow$  vrsta divergira, ker členi  
 ne gredo proti 0!

2)  $a < 0$  ; 
$$\frac{(\sqrt{n} + a\sqrt{n+1}) \cdot (\sqrt{n} - a\sqrt{n+1})}{\sqrt{n} - a\sqrt{n+1}} =$$

$$= \frac{n - a^2 n - a^2}{\sqrt{n} - a\sqrt{n+1}} = \frac{(1-a^2)n - a^2}{\sqrt{n} - a\sqrt{n+1}}$$

2.1)  $\bar{C}_e$   $1-a^2 \neq 0 \Rightarrow$  
$$\frac{\begin{matrix} \xrightarrow{\pm \infty} \\ (1-a^2) \cdot \sqrt{n} \end{matrix} - \begin{matrix} \xrightarrow{0} \\ \frac{a^2}{\sqrt{n}} \end{matrix}}{\begin{matrix} \xrightarrow{1-a} \\ 1 - a\sqrt{1+\frac{1}{n}} \end{matrix}} \rightarrow \pm \infty$$

$\Rightarrow$  vrsta divergira

2.2)  $\bar{C}_e$   $a = -1 \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \rightarrow 0$

toda  $\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} > \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$

ker  $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}}$  divergira  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  naša vrsta divergira.

5) b) 1)  $\bar{C}_e$  je  $b \neq 0 \Rightarrow b \underbrace{\sum (\sqrt{n} + \frac{b}{\sqrt{n+1}})}_{\text{divergira}}$   
divergira

$$(2) \quad \text{es ist } \underline{r=0} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c \sqrt{n+1} \quad \text{konvergiert}$$

da  $c=0$ .