

### Rešitve 3. kolokvija iz Analize 1

(1) **N** Naj bosta  $f$  in  $g$  funkciji, ki sta odvedljivi v okolici točke 0 in naj bo  $f(0) = g(0) = 0$ . Če obstaja limita  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ , potem obstaja tudi limita  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  in je enaka  $L$ .

**N** Obstaja taka zvezna funkcija  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , ki ni Riemannovo integrabilna na intervalu  $[0, 1]$ .

**N** Vsaka funkcija, ki je odvedljiva na intervalu  $(-2, 2)$ , je zvezno odvedljiva na intervalu  $(-1, 1)$ .

**P** Vsaka zvezna funkcija  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ima primitivno funkcijo  $F : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ .

**N** Funkcija  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , za katero velja  $f(x) = 0$ , če je  $x < 0$  in  $f(x) = 2015$ , če je  $x > 0$ , ni integrabilna na  $[-1, 1]$ .

**N** Za vsak  $x \in \mathbb{R}$  velja

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n!}.$$

**P** Če je funkcija  $f$  odvedljiva v točki  $a$  in funkcija  $g$  zvezna v točki  $a$ , je produkt  $fg$  funkcija, ki je zvezna v točki  $a$ .

**N** Če je  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija in velja  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ , potem obstaja posplošeni integral  $\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ .

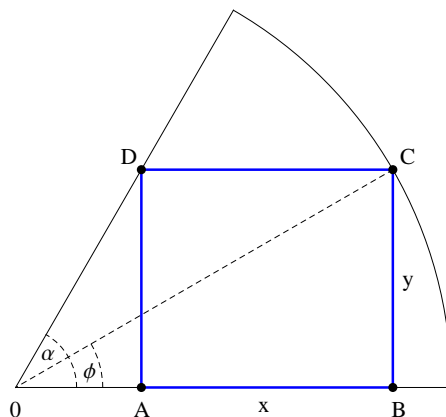
**P** Naj bo funkcija  $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna in odvedljiva na intervalu  $(0, 4)$ . Če velja  $f(3) = f(2) + 1$ , potem obstaja taka točka  $c \in (2, 3)$ , da je  $f'(c) = 1$ .

**P** Če je funkcija  $f$  odvedljiva v okolici točke  $a$  in velja  $f'(a) = 1$ , potem  $f$  v točki  $a$  nima lokalnega ekstrema.

- (2) V krožni izsek s polmerom  $R = 1$  in s središčnim kotom  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  vrtamo pravokotnik tako, da njegova osnovnica leži na polmeru krožnega izseka, eno oglišče pa na loku. Izmed vseh takšnih pravokotnikov poišči tistega, ki ima največjo ploščino.

POZOR: Vse korake natančno utemelji!

*Rešitev:* Najprej pogledjmo skico.



Označimo z  $A$ ,  $B$ ,  $C$  in  $D$  oglišča pravokotnika in  $x = |AB|$  ter  $y = |BC|$ . Ploščina pravokotnika je potem enaka

$$S = xy.$$

Sedaj bi radi dolžini stranic  $x$  in  $y$  izrazili s primernim parametrom. Vzamemo lahko na primer kar kot  $\phi$  med daljicama  $OB$  in  $OC$ . Potem takoj dobimo, da je

$$y = \sin \phi.$$

Dolžino stranice  $x$  pa dobimo z naslednjim računom

$$x = |OB| - |OA| = \cos \phi - y \operatorname{ctg} \alpha = \cos \phi - \sin \phi \operatorname{ctg} \alpha.$$

Ploščina pravokotnika je torej enaka

$$S(\phi) = \cos \phi \sin \phi - \sin^2 \phi \operatorname{ctg} \alpha.$$

Iščemo maksimum funkcije  $S$  na intervalu  $[0, \alpha]$ . Odvod funkcije  $S$  je enak

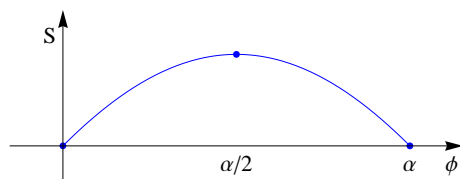
$$S'(\phi) = \cos(2\phi) - \sin(2\phi) \operatorname{ctg} \alpha.$$

Stacionarne točke so rešitve enačbe:

$$\begin{aligned} \cos(2\phi) - \sin(2\phi) \operatorname{ctg} \alpha &= 0, \\ \cos(2\phi) \sin \alpha - \sin(2\phi) \cos \alpha &= 0, \\ \sin(\alpha - 2\phi) &= 0. \end{aligned}$$

Ker je  $\phi \in [0, \alpha]$ , je  $\alpha - 2\phi \in [-\alpha, \alpha]$ . Edina ničla sinusne funkcije na tem intervalu pa je pri kotu nič, zato ima funkcija  $S$  eno stacionarno točko  $\phi = \frac{\alpha}{2}$ . Kandidati za ekstreme funkcije  $S$  so torej koti  $\{0, \frac{\alpha}{2}, \alpha\}$ . Iz vrednosti  $S(0) = S(\alpha) = 0$  in  $S(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  sledi, da ima  $S$  maksimum v točki  $\phi = \frac{\alpha}{2}$ .

Poglejmo še graf funkcije  $S$ .



□

- [2] Skica.
- [3] Izbira parametra  $\phi$ .
- [7] Izražava obeh stranic in ploščine s parametrom  $\phi$ .
- [2] Določitev definicijskega območja funkcije  $S$ .
- [4] Izračun odvoda in stacionarne točke  $S$ .
- [2] Dokaz, da ima  $S$  maksimum v točki  $\phi = \frac{\alpha}{2}$ .

(3) Za krivuljo, ki je podana v parametrični obliki s predpisom:

$$x(t) = \frac{t^2}{t-1},$$

$$y(t) = \frac{t}{t+1}$$

določi ekstremne točke in asimptote ter jo skiciraj.

*Rešitev:* Funkcija  $x$  ima ničlo  $t = 0$ , pol pri  $t = 1$  in asimptoto  $x = t + 1$ , funkcija  $y$  pa ničlo  $t = 0$ , pol  $t = -1$  in vodoravno asimptoto  $y = 1$ . Odvoda komponent sta:

$$\dot{x} = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2},$$

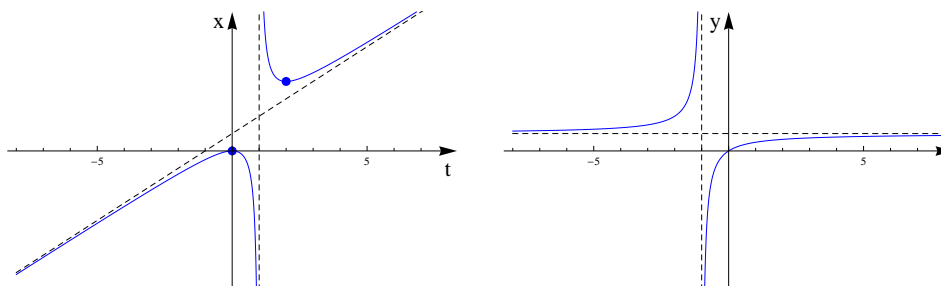
$$\dot{y} = \frac{1}{(t+1)^2}.$$

Funkcija  $x$  ima stacionarni točki  $t_1 = 0$  in  $t_2 = 2$ , funkcija  $y$  pa nima stacionarnih točk. Ekstremni točki sta torej:

$$\vec{r}(0) = (0, 0),$$

$$\vec{r}(2) = (4, \frac{2}{3}).$$

V obeh točkah je tangenta na graf krivulje navpična. Poglejmo grafa obeh komponent.



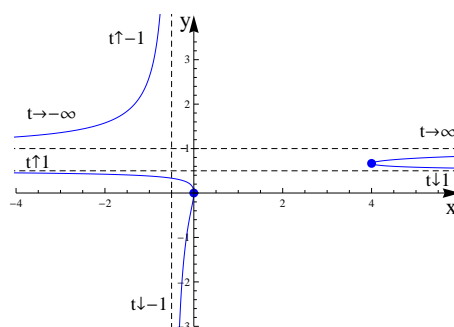
Komponenti imata pole pri parametrih  $t = \pm 1$ . Pri teh vrednostih in pa še pri  $t \rightarrow \pm\infty$  bo krivulja ušla v neskončnost. Z izračunom limit obeh komponent pri teh parametrih dobimo naslednje asimptote:

$$t \rightarrow -1 \implies x = -\frac{1}{2},$$

$$t \rightarrow 1 \implies y = \frac{1}{2},$$

$$t \rightarrow \pm\infty \implies y = 1.$$

Če upoštevamo oba grafa in asimptote, lahko skiciramo graf krivulje.





- [3] Izračun ničel, polov in asimptot obeh komponent.
- [4] Izračun odvodov komponent in ekstremnih točk.
- [4] Skica grafov obeh komponent.
- [3] Izračun asimptot.
- [6] Skica krivulje.

(4) Izračunaj nedoločena integrala:

(a)  $\int \frac{2x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 3}{x^3 - x^2 + 2} dx,$

(b)  $\int x \arcsin \frac{1}{x} dx.$

*Rešitev:*

(a)  $\int \frac{2x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 3}{x^3 - x^2 + 2} dx :$

Z deljenjem števca in imenovalca dobimo

$$\frac{2x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 3}{x^3 - x^2 + 2} = 2x - 2 + \frac{-3x + 7}{x^3 - x^2 + 2}.$$

Izračunajmo najprej integral racionalne funkcije. Ker je  $x^3 - x^2 + 2 = (x+1)(x^2 - 2x + 2)$ , bomo vzeli nastavek

$$\int \frac{-3x + 7}{x^3 - x^2 + 2} dx = A \ln |x + 1| + B \ln(x^2 - 2x + 2) + C \arctg(x - 1).$$

Z odvajanjem pridemo do enakosti

$$\frac{-3x + 7}{x^3 - x^2 + 2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B(2x - 2)}{x^2 - 2x + 2} + \frac{C}{x^2 - 2x + 2} = \frac{Ax^2 - 2Ax + 2A + 2Bx^2 - 2B + Cx + C}{x^3 - x^2 + 2}.$$

Dobljeni sistem enačb:

$$\begin{aligned} A + 2B &= 0, \\ -2A + C &= -3, \\ 2A - 2B + C &= 7 \end{aligned}$$

ima rešitev  $A = 2$ ,  $B = -1$  in  $C = 1$ . Torej je

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 3}{x^3 - x^2 + 2} dx &= \int \left( 2x - 2 + \frac{-3x + 7}{x^3 - x^2 + 2} \right) dx, \\ &= \underline{\underline{x^2 - 2x + 2 \ln |x + 1| - \ln(x^2 - 2x + 2) + \arctg(x - 1) + C.}} \end{aligned}$$

(b)  $\int x \arcsin \frac{1}{x} dx :$

Integrali bomo po delih z izbiro  $u = \arcsin \frac{1}{x}$  in  $dv = x dx$ . Potem je  $du = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ ,  $v = \frac{x^2}{2}$  in

$$\int x \arcsin \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \arcsin \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \underline{\underline{\frac{x^2}{2} \arcsin \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \sqrt{x^2-1} + C.}}$$

Za izračun drugega integrala lahko uvedemo novo spremenljivko  $t = x^2 - 1$ . □

- [2] Deljenje števca in imenovalca.
- [1] Razcep imenovalca na dva faktorja.
- [5] Integracija racionalne funkcije.
- [2] Rezultat.
- [5] Integracija po delih.
- [3] Uvedba nove spremenljivke.
- [2] Rezultat.

(5) Naj bo  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  zvezno odvedljiva funkcija, za katero velja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Dokaži, da obstaja tako zaporedje realnih števil  $(c_n)$ , da velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(c_n) = 0.$$

NAMIG: Lagrangeev izrek na primernem intervalu.

*Rešitev:* Poiskali bomo zaporedje pozitivnih realnih števil  $(c_n)$ , tako da bo za vsak  $n \in \mathbb{N}$  veljalo

$$|f'(c_n)| < \frac{1}{n}.$$

Od tod bo sledilo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(c_n) = 0.$$

Poglejmo sedaj, kako najdemo število  $c_n$ , ki zadošča zgornjemu pogoju. Če uporabimo Lagrangeev izrek na intervalu  $[x, 2x]$  za  $x > 0$ , dobimo nek  $t \in (x, 2x)$ , da velja

$$\begin{aligned} f(2x) - f(x) &= f'(t)(2x - x), \\ \frac{f(2x)}{x} - \frac{f(x)}{x} &= f'(t). \end{aligned}$$

Z uporabo trikotniške neenakosti lahko ocenimo

$$|f'(t)| \leq \left| \frac{f(2x)}{x} \right| + \left| \frac{f(x)}{x} \right| = 2 \left| \frac{f(2x)}{2x} \right| + \left| \frac{f(x)}{x} \right|.$$

Ker je  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ , lahko najdemo tak  $x$ , da bo veljalo  $\left| \frac{f(x)}{x} \right| < \frac{1}{3n}$  in  $\left| \frac{f(2x)}{2x} \right| < \frac{1}{3n}$ . Pri danem  $x$  bo torej veljalo

$$|f'(t)| \leq 2 \left| \frac{f(2x)}{2x} \right| + \left| \frac{f(x)}{x} \right| < \frac{2}{3n} + \frac{1}{3n} = \frac{1}{n}.$$

Če označimo  $c_n = t$ , smo torej našli število, za katero velja

$$|f'(c_n)| < \frac{1}{n}.$$

□

- [4] Opazka, da je dovolj najti zaporedje, ki zadošča pogoju  $|f'(c_n)| < \frac{1}{n}$ .
- [6] Uporaba Lagrangeevega izreka na intervalu  $[x, 2x]$ .
- [5] Ocena  $|f'(t)| \leq 2 \left| \frac{f(2x)}{2x} \right| + \left| \frac{f(x)}{x} \right|$ .
- [5] Dokaz eksistence števila  $c_n$ .