

Analiza 1

3. izpit

9. 9. 2015

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Če potenčna vrsta konvergira v neki točki, potem je v tej točki njena vsota zvezna funkcija.



Če premešamo vrstni red členov v konvergentni številski vrsti, vedno dobimo konvergentno vrsto z enako vsoto.



Obstajata tak metrični prostor M in skrčitev $f : M \rightarrow M$, da ima f več kot eno negibno točko.



Obstaja taka neskončnokrat odvedljiva funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, da njena Taylorjeva vrsta s središčem v $a = 0$ konvergira povsod, njena vsota pa ne sovпада s funkcijo f .



Za zvezno funkcijo $f : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, ki je odvedljiva na $(-1, 0)$ ter zanjo velja $f(-1) = 1$ in $f(0) = 0$, obstaja taka točka $c \in (-1, 0)$, da je $|f'(c)| = 1$.



Vsako navzgor omejeno realno zaporedje ima vsaj eno realno stekališče.



Vsaka neskončna množica ima števno neskončno podmnožico.



Če funkcijsko zaporedje $f_n : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, ki konvergira po točkah na $[0, 2]$, ne konvergira enakomerno, njegova limitna funkcija ni zvezna.



Naj bosta M in N metrična prostora ter $b \in N$ izbran element. Če za $f : M \rightarrow N$ velja $f(x) = b$ za vsak $x \in M$, je preslikava f zvezna.



Zvezna funkcija $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ima zvezno odvedljivo primitivno funkcijo $F : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$.

2. naloga (15 točk)

Dano je zaporedje

$$a_n = n\sqrt{n^2 + 1} - n^2 + \sin \frac{n\pi}{2} \cdot \left(\frac{n+2}{n}\right)^{4n-3}.$$

Določi vsa stekališča zaporedja a_n .

3. naloga (25 točk)

Dana je funkcija

$$f(x) = x^2 - x\sqrt{1-x^2}.$$

a) S pomočjo prvega odvoda čim natančneje skiciraj graf funkcije na njenem celotnem definicijskem območju.

b) Izračunaj ploščino območja, ki ga oklepata abscisna os in tisti del grafa funkcije f , ki leži pod abscisno osjo.

4. naloga (20 točk)

Ugotovi, za katera realna števila α obstaja integral

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{2\alpha-1}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

in nato dokaži, da za vsako naravno število n velja

$$I(n) = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

OPOMBA: Velja $0!! = 1$.

5. naloga (20 točk)

a) Za katere $\alpha > 0$ konvergira vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{1+n+n^\alpha}?$$

b) Seštej dano vrsto za $\alpha = 2$.

NAMIG: Najprej dokaži, da za $0 < x, y$ velja

$$\operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy} = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y.$$