

## Rešitve 2. izpita iz Analize 1

- (1) **N** Naj bo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija in  $a \in \mathbb{R}$ . Če obstaja zaporedje realnih števil  $(a_n)$ , ki konvergira k  $a$  in velja  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$ , je funkcija  $f$  zvezna v točki  $a$ .
- N** Zvezna funkcija  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  je enakomerno zvezna.
- N** Naj bo  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilna funkcija. Potem je funkcija  $F : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , definirana s predpisom  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , odvedljiva.
- N** Vsako omejeno zaporedje realnih števil je konvergentno.
- P** Enačba  $z^5 = i$  ima 5 različnih kompleksnih rešitev.
- N** Denimo, da ima potenčna vrsta  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  konvergenčni polmer  $R$  in da je funkcija  $f$  njena vsota na intervalu  $(-R, R)$ . Potem potenčna vrsta na intervalu  $(-R, R)$  enakomerno konvergira k funkciji  $f$ .
- N** Za vsak  $x \in \mathbb{R}$  velja enakost  $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ .
- P** Množici  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  sta ekvipolentni.
- P** Če zvezno odvedljiva funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ni injektivna, ima vsaj eno stacionarno točko.
- P** V poljubnem metričnem prostoru  $(M, d)$  je unija poljubne družine odprtih podmnožic  $M$  spet odprta podmnožica  $M$ .

- (2) (a) Odsek krivulje  $y = \sin x$  za  $x \in [0, \pi]$  zavrtimo okrog abscisne osi. Izračunaj površino nastale vrtenine.  
 (b) Obravnavaj konvergenco integrala

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x\sqrt[3]{x^2-1}} dx.$$

*Rešitev:* (a) Z uporabo formule za površino vrtenin dobimo, da je površina enaka

$$P = 2\pi \int_0^\pi \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx.$$

Najprej uvedimo novo spremenljivko  $t = \cos x$ , da dobimo

$$P = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2} dt = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt.$$

Ta integral lahko sedaj izračunamo z uporabo algoritma za integriranje iracionalnih funkcij, lahko pa tudi z uporabo hiperboličnih funkcij. Z uvedbo nove spremenljivke  $t = \operatorname{sh} u$  dobimo

$$\begin{aligned} P &= 4\pi \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt = 4\pi \int_0^{\operatorname{arsh} 1} \operatorname{ch}^2 u du = 4\pi \int_0^{\operatorname{arsh} 1} \frac{\operatorname{ch} 2u + 1}{2} du, \\ &= 4\pi \left( \frac{u}{2} + \frac{2u}{4} \right) \Big|_0^{\operatorname{arsh} 1}, \\ &= 2\pi \operatorname{arsh} 1 + \pi \operatorname{sh}(2 \operatorname{arsh} 1). \end{aligned}$$

Ta rezultat lahko izrazimo tudi v obliki

$$P = \underline{\underline{2\pi \ln(1 + \sqrt{2}) + 2\pi\sqrt{2}}}.$$

- (b) Funkcija  $f(x) = \frac{\ln x}{x\sqrt[3]{x^2-1}}$  je zvezna na intervalu  $(1, \infty)$ , zato moramo obravnavati konvergenco integrala

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x\sqrt[3]{x^2-1}} dx,$$

ko gre  $x \rightarrow 1$  in  $x \rightarrow \infty$ .

$x \rightarrow 1$ : Čeprav funkcija  $f$  ni definirana v točki  $x = 1$ , pa ima v tej točki limito

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x\sqrt[3]{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x-1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}} = 0.$$

Od tod sledi, da integral konvergira pri  $x \rightarrow 1$ .

$x \rightarrow \infty$ : Za obravnavo konvergence v neskončnosti, lahko najprej ocenimo, da za velike  $x$  velja

$$\frac{\ln x}{x\sqrt[3]{x^2-1}} \approx \frac{\ln x}{x^{\frac{5}{3}}}.$$

Če upoštevamo, da logaritemska funkcija narašča zelo počasi, lahko ugotovimo, da gre funkcija proti nič malce počasneje kot funkcija  $\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$ , kar pomeni, da integral konvergira. Formalno lahko to dokažemo z zapisom

$$\frac{\ln x}{x\sqrt[3]{x^2-1}} = \frac{\frac{\sqrt{x} \ln x}{\sqrt[3]{x^2-1}}}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Z L'Hospitalovim pravilom lahko pokažemo, da ima funkcija  $g(x) = \frac{\sqrt{x} \ln x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$  limito  $L = 0$  pri  $x \rightarrow \infty$ . Ker je  $s = \frac{3}{2} > 1$ , integral konvergira pri  $x \rightarrow \infty$ .

Od tod sledi, da integral konvergira. □

- [1] Formula za površino vrtenine.
- [3] Uvedba nove spremenljivke  $t = \cos x$ .
- [5] Izračun integrala iracionalne funkcije.
- [1] Površina.
- [4] Ugotovitev, da ima funkcija limito pri  $x = 1$ .
- [5] Dokaz, da integral konvergira pri  $x \rightarrow \infty$ .
- [1] Sklep, da integral konvergira.

- (3) V kroglo s polmerom  $R$  včrtamo kvader, katerega osnovna ploskev ima obliko kvadrata. Izmed vseh takšnih kvadrov poišči tistega, ki ima največjo prostornino.

*Rešitev:* Če kvader včrtamo v kroglo, bo njegova telesna diagonala ležala na premeru krogle. Ker je osnovna ploskev kvadra kvadrat, imajo njegove stranice dolžine  $a$ ,  $a$  in  $b$ , zato z uporabo Pitagorovega izreka pridemo do enakosti

$$(2R)^2 = a^2 + a^2 + b^2 = 2a^2 + b^2.$$

Iz te enakosti lahko izrazimo

$$b = \sqrt{4R^2 - 2a^2},$$

kar pomeni, da je prostornina kvadra enaka

$$V(a) = a^2b = a^2\sqrt{4R^2 - 2a^2}.$$

Funkcija  $V$  je definirana za  $a \in [0, \sqrt{2}R]$ , mi pa iščemo njen maksimum na tem intervalu. Odvod funkcije  $V$  je enak

$$V'(a) = 2a\sqrt{4R^2 - 2a^2} - \frac{2a^3}{\sqrt{4R^2 - 2a^2}}.$$

Odvod bo enak nič, ko bo:

$$\begin{aligned} 2a\sqrt{4R^2 - 2a^2} - \frac{2a^3}{\sqrt{4R^2 - 2a^2}} &= 0, \\ \sqrt{4R^2 - 2a^2} &= \frac{a^2}{\sqrt{4R^2 - 2a^2}}, \\ 4R^2 - 2a^2 &= a^2, \\ a &= \sqrt{\frac{4}{3}}R. \end{aligned}$$

Levo od te točke je odvod pozitiven, desno od nje pa negativen, zato ima funkcija  $V$  maksimum v točki  $a = \sqrt{\frac{4}{3}}R$ . Včrtan kvader z največjo prostornino je torej tisti, katerega osnovna ploskev ima stranico dolžine  $a\sqrt{\frac{4}{3}}R$ .  $\square$

- [8] Izpeljava zveze  $(2R)^2 = 2a^2 + b^2$ .
- [2] Zapis funkcije  $V$ .
- [4] Odvod funkcije  $V$ .
- [3] Izračun stacionarne točke.
- [3] Utemeljitev, da ima  $V$  v stacionarni točki maksimum.

(4) Dana je potenčna vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 + n)}{2^{n+1}} x^{n-1}.$$

(a) Določi območje konvergence potenčne vrste.

(b) Izračunaj vsoto potenčne vrste.

*Rešitev:* (a) Potenčna vrsta ima središče v točki  $a = 0$ , koeficienti pa so  $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+2}}$ . Konvergenčni polmer vrste je torej enak

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+2}}}{\frac{(n+2)(n+3)}{2^{n+3}}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+3)} = 2.$$

Od tod sklepamo, da vrsta konvergira na intervalu  $I = (-2, 2)$ , v robnih točkah pa velja:

$$\cdot x = 2 \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 + n)}{2^{n+1}} 2^{n-1} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n) = \infty \Rightarrow \text{vrsta divergira pri } x = 2,$$

$$\cdot x = -2 \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 + n)}{2^{n+1}} (-2)^{n-1} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n) (-1)^{n-1} \Rightarrow \text{vrsta divergira pri } x = -2.$$

Vrsta torej konvergira na intervalu  $(-2, 2)$ .

(b) Definirajmo za  $x \in (-2, 2)$  funkcijo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 + n)}{2^{n+1}} x^{n-1}.$$

Izračunali jo bomo z dvakratnim integriranjem. Nedoločeni integral funkcije  $f$  je

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^{n+1}} x^n.$$

Če sedaj funkcijo  $F$  še enkrat integriramo, dobimo

$$\int_0^x F(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \dots$$

V tem izrazu prepoznamo vsoto geometrijske vrste, kar pomeni, da je

$$\int_0^x F(t) dt = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2 - x}.$$

Z odvajanjem sedaj dobimo

$$F(x) = \left( \int_0^x F(t) dt \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x - x^2}{(2 - x)^2}$$

in

$$f(x) = F'(x) = \frac{4}{(2 - x)^3}.$$

□

- [5] Izračun konvergenčnega polmera vrste.
- [2] Po točka za obravnavo konvergence vrste v robnih točkah intervala.
- [1] Območje konvergence vrste.
- [5] Dvakratno integriranje vrste po členih.
- [4] Uporaba formule za vsoto geometrijske vrste.
- [3] Odvajanje in vsota vrste.

(5) Na množico  $\mathbb{R}^2$  s koordinatnim izhodiščem  $O = (0, 0)$  vpeljemo metriko  $d$  s predpisom

$$d(T_1, T_2) = \begin{cases} d_2(T_1, T_2) & ; \text{ točki } T_1 \text{ in } T_2 \text{ ležita na istem poltraku z začetkom v } O, \\ d_2(T_1, O) + d_2(O, T_2) & ; \text{ sicer,} \end{cases}$$

kjer je  $d_2$  evklidska metrika na  $\mathbb{R}^2$ .

(a) Ugotovi, ali je množica  $A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$  odprta oziroma zaprta podmnožica metričnega prostora  $(\mathbb{R}^2, d)$ .

(b) Obravnavaj zveznost preslikav  $\text{Id} : (\mathbb{R}^2, d) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_2)$  in  $\text{Id} : (\mathbb{R}^2, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d)$ .

*Rešitev:* (a) Najprej bomo pokazali, da je množica  $A$  odprta. Torej moramo za poljubno točko  $(x, 0) \in A$  najti tak  $\epsilon > 0$ , da bo  $K((x, 0), \epsilon) \subset A$ . Ker je množica  $A$  poltrak z začetkom v  $O$ , za poljubno točko  $T \in A^c$  velja  $d((x, 0), T) \geq d_2((x, 0), O) = x$ . Če vzamemo  $\epsilon = \frac{x}{2}$ , bo torej veljalo  $K((x, 0), \epsilon) \subset A$ .

Da bi dokazali, da množica  $A$  ni zaprta, pa lahko opazimo, da krogle s središčem v  $O$  v metriki  $d$  sovpadajo s kroglami v evklidski metriki. Od tod sledi, da vsaka krogla s središčem v  $O$  seka množico  $A$ . Ker  $O \notin A$ , torej množica  $A$  ni zaprta.

(b) Najprej pokažimo, da je preslikava  $\text{Id} : (\mathbb{R}^2, d) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_2)$  zvezna. To sledi iz dejstva, da je

$$d_2(T_1, T_2) \leq d(T_1, T_2)$$

za vsaka  $T_1, T_2 \in \mathbb{R}^2$ . Pri danem  $\epsilon$  je torej dober kar  $\delta = \epsilon$ .

Po drugi strani pa preslikava  $\text{Id} : (\mathbb{R}^2, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d)$  ni zvezna. Vzemimo na primer zaporedje točk  $T_n = (x, \frac{1}{n})$  za nek  $x > 0$ . V evklidski metriki to zaporedje točk konvergira k točki  $T = (x, 0)$ . Če bi bila  $\text{Id} : (\mathbb{R}^2, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d)$  zvezna preslikava, bi moralo to zaporedje konvergirati tudi v metriki  $d$ . To pa ni res, saj je

$$d(T_n, T) = d_2(T_n, O) + d_2(O, T) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + x > 2x.$$

□

- [5] Utemeljitev, da je množica  $A$  odprta.
- [5] Utemeljitev, da množica  $A$  ni zaprta.
- [5] Utemeljitev, da je  $\text{Id} : (\mathbb{R}^2, d) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_2)$  zvezna preslikava.
- [5] Utemeljitev, da preslikava  $\text{Id} : (\mathbb{R}^2, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d)$  ni zvezna.